



Χρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση. Οι απόψεις και οι γνώμες που εκφράζονται είναι αποκλειστικά του/των συγγραφέα/ων και δεν αντανακλούν κατ' ανάγκη τις απόψεις και τις γνώμες της Ευρωπαϊκής Ένωσης ή του Ευρωπαϊκού Εκτελεστικού Οργανισμού Εκπαίδευσης και Πολιτισμού (EACEA). Ούτε η Ευρωπαϊκή Ένωση ούτε ο EACEA μπορούν να θεωρηθούν υπεύθυνοι γι' αυτές.

**ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑΣ ΔΙΕΥΚΟΛΥΝΣΗΣ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ  
(ΣΧΕΔΙΟ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑΣ) - ΕΠΙΠΕΔΟ 2 ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΙ  
ΤΙΤΛΟΣ: Αρμονία – η ομορφιά των μαθηματικών**

**S**

**T**

**Eng**

**A**

**M**

**Ent**



**1. Επισκόπηση**

Τίτλος	<b>Αρμονία – η ομορφιά των μαθηματικών. Μαθηματικά στις Τέχνες και τη Φύση.</b>		
Ερώτηση ή θέμα αφόρμησης	<i>Πώς ορίζεται η αρμονία στα Μαθηματικά και στις Τέχνες (εικαστικές τέχνες και μουσική);</i>  <i>Πώς λειτουργούν οι μαθηματικές έννοιες στην καρδιά αυτού που βρίσκουμε ευχάριστο στο μάτι και το αυτί; Ποια είναι η χρυσή αναλογία («η θεϊκή αναλογία», «αναλογία ομορφιάς») και πού μπορεί να βρεθεί στα σχήματα των ζωντανών οργανισμών, των πινάκων, των γλυπτών και των κτιρίων; Είναι τα Μαθηματικά η γλώσσα της φύσης;</i>		
Ηλικίες, βαθμοί, ...	14-15 ετών	8-9 βαθμοί	
Διάρκεια, Χρονοδιάγραμμα, Δραστηριότητες	18 μαθήματα	18 τμήματα το καθένα με διάρκεια 40 λεπτά.	1 ή 2 τάξεις την εβδομάδα για 9-18 συνεχόμενες εβδομάδες
Ευθυγράμμιση προγράμματος σπουδών	Μαθηματικά, Τέχνη (εικαστικά, μουσική), Βιολογία, Πληροφορική (Γραφιστική)  Μαθαίνοντας τη μαθηματική βάση της θεωρίας της αρμονίας - από τη σχολή του Πυθαγόρα, τα πλατωνικά στερεά και τον γεωμετρικό ορισμό της χρυσής τομής από τον Ευκλείδη, μέσω των συνεισφορών διάσημων Ευρωπαίων μαθηματικών όπως ο Leonardo Fibonacci, ο François Lucas, ο Luca Pacioli, ο Jacques Binet, ο Jacob Bernoulli, ο Johannes Kepler και άλλοι στις πιο πρόσφατες γενικεύσεις της χρυσής αναλογίας που ονομάζεται μεταλλικά μέσα από τη Vera W. de Spinadel. Μαθαίνοντας πώς αυτές οι θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες βρίσκονται στα έργα τέχνης, το σχεδιασμό και την αρχιτεκτονική, το σύμπαν και τη ζωντανή φύση. Η σημασία των Μαθηματικών ως το απόλυτο μέσο κατανόησης και διαμόρφωσης του κόσμου γύρω μας.		

Συνεισφέροντες,  
Συνεργάτες

Περίληψη - Σύνοψη

*Γκαλερί τέχνης, Μουσεία ιστορίας, Στούντιο γραφιστικής*

*Αρχικά, οι μαθητές διδάσκονται από έναν καθηγητή μαθηματικών ο οποίος τους εισάγει στον μαθηματικό ορισμό της αρμονίας και τις γεωμετρικές πτυχές της. Ο καθηγητής μαθηματικών παρακολουθεί την ιστορική εξέλιξη της έννοιας της αρμονίας, εξηγώντας και υπογραμμίζοντας τους στενούς δεσμούς της με τις τέχνες και τη μελέτη του σύμπαντος και της ζωντανής φύσης. Αρχικά, οι μαθητές μαθαίνουν για τη χρυσή τομή, τον γεωμετρικό ορισμό της και ότι είναι η θετική ρίζα μιας συγκεκριμένης τετραγωνικής εξίσωσης. Στη συνέχεια, οι μαθητές μαθαίνουν για κάποιες γενικεύσεις της χρυσής τομής – την ασημένια τομή και άλλα μεταλλικά μέσα, πώς μπορούν επίσης να οριστούν ως ρίζες τετραγωνικών εξισώσεων και τη σύνδεσή τους με κανονικά πολύγωνα. Μαθαίνουν επίσης για τις συνδέσεις αυτών των παράλογων αριθμών με διάσημες σειρές αριθμών, όπως οι αριθμοί Fibonacci, Lucas και Pell. Οι μαθητές επιλύουν γεωμετρικά και αλγεβρικά προβλήματα που αφορούν τη χρυσή και άλλες ενότητες.*

*Ένας καθηγητής βιολογίας εξηγεί στους μαθητές πού βρίσκονται η χρυσή αναλογία και η σπείρα Fibonacci (λογαριθμική σπείρα με τη χρυσή αναλογία ως αυξητικό παράγοντα, δηλαδή η σπείρα ανάπτυξης) σε διάφορα σχήματα ζωντανών οργανισμών.*

*Ο καθηγητής τέχνης (εικαστικές τέχνες, κατά προτίμηση με εμπειρία στη γραφιστική ή το σχεδιασμό λογοτύπου) εισάγει τους μαθητές στην έννοια της αρμονίας στις τέχνες, σε διάσημα έργα ζωγράφων (για παράδειγμα Leonardo da Vinci, Salvador Dali) και γλυπτών (για παράδειγμα Φειδίας), αντικείμενα και κτίρια από την αρχαιότητα έως τις σύγχρονες ημέρες που βασίζονται στη χρυσή τομή ή ασημένια τομή.*

*Ένας καθηγητής πληροφορικής ή ο καθηγητής τέχνης εισάγει τους μαθητές σε ορισμένες βασικές λειτουργίες του λογισμικού υπολογιστή που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για γραφικά και σχεδιασμό λογοτύπου, όπως το Adobe Photoshop, το Illustrator, το Corel Draw, το Wix Logo Maker, το Canva, το Adobe Express, το Ucraft, το GIMP ή άλλα.*

*(Προαιρετικό) Ένας δάσκαλος μουσικής εξηγεί στους μαθητές πώς η έννοια της αρμονίας στη μουσική βασίζεται στην ίδια αρχή όπως στα μαθηματικά – ιδέες που πηγαινούν πίσω στη σχολή του Πυθαγόρα σχετικά με τις αρμονικές σειρές, τα μουσικά διαστήματα και τις μουσικές αποστάσεις που ακούγονται ευχάριστες στο ανθρώπινο αυτί.*

*Οι μαθητές μπορούν να περιηγηθούν στο διαδίκτυο ή / και να επισκεφθούν γκαλερί τέχνης και μουσεία μαζί με τον καθηγητή μαθηματικών και τέχνης για να δουν διάφορα έργα τέχνης και να συζητήσουν τη χρυσή αναλογία και άλλες σχέσεις αρμονίας που παρουσιάζονται σε αυτά.*

Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της διεύθυνσης του σχολείου, οργανώνεται συνάντηση με επαγγελματία γραφίστα. Ο γραφίστας εξηγεί επίσης στους μαθητές πώς να χρησιμοποιούν λογισμικό για να σχεδιάσουν ένα απλό λογότυπο ή ένα απλό ψηφιακό έργο τέχνης και πώς να ενσωματώσουν τις έννοιες της αρμονίας για να το κάνουν πιο αισθητικό. Ο σχεδιαστής παρουσιάζει στους μαθητές μερικά από τα έργα τέχνης τους ή έργα άλλων σχεδιαστών τα οποία βρίσκει όμορφα και εμπνευσμένα εξηγώντας πώς χρησιμοποιούν τη χρυσή τομή (αρμονία).

Στο επόμενο στάδιο, οι μαθητές με τη βοήθεια του καθηγητή τέχνης (ή καθηγητή πληροφορικής) και του γραφίστα αναπτύσσουν το δικό τους έργο για ένα σχέδιο λογότυπου (για πραγματική ή φανταστική μάρκα της επιλογής του μαθητή) ή ψηφιακό έργο τέχνης που σχετίζεται με τη χρυσή τομή ή άλλα μεταλλικά μέσα. Για έμπνευση, μπορούν να χρησιμοποιήσουν φυσικά σχήματα όπως διδάσκονται από τον καθηγητή βιολογίας και να περιηγηθούν στο Διαδίκτυο (Google ή ιστοσελίδες όπως το Pinterest) για να δουν μερικά ψηφιακά σχέδια. Οι μαθητές μπορούν πρώτα να σχεδιάσουν τα σχέδιά τους με μολύβια σε χαρτί, να τα συζητήσουν με τον καθηγητή τέχνης και στη συνέχεια να προχωρήσουν στη σχεδιάσή τους με το λογισμικό γραφιστικής ή σχεδιασμού λογοτύπου που έχει επιλέξει ο καθηγητής πληροφορικής και ο γραφίστας.

Στο τελικό στάδιο, τα έργα των μαθητών μπορούν να εκτυπωθούν και να παρουσιαστούν σε μια σχολική έκθεση και να συζητηθούν μεταξύ τους. Κάθε μαθητής μπορεί να εξηγήσει στους εκπαιδευτικούς και τους συνομηλικούς του από πού άντλησαν την έμπνευση και πώς ενσωμάτωσαν τις έννοιες της αρμονίας που έμαθαν από τα μαθηματικά και τη θεωρία των εικαστικών τεχνών .

*Η εργασία για το θέμα διαρκεί 18 ώρες.*

#### Αναφορές, παραθέσεις

Alexey Stakhov, Scott Olsen, Τα μαθηματικά της αρμονίας, World Scientific, 2009.

Gary B. Meisner, The Golden Ratio: The Divine Beauty of Mathematics, Εκδόσεις Race Point, 2018.

John Stillwell, Mathematics and its History, 3η έκδοση, Springer, 2010.

Mario Livio, Η χρυσή αναλογία: Η ιστορία του Phi, ο πιο εκπληκτικός αριθμός στον κόσμο, Broadway, 2002, ISBN: 978-0767908153.

Alfred S. Posamentier, Ingmar Lehmann, Η ένδοξη χρυσή αναλογία, Prometheus Books, 2011.

Thomas Koshy, Fibonacci και Lucas Αριθμοί με εφαρμογές, Δεύτερη έκδοση, Γουίλι, 2018.

Alfred S. Posamentier, Ingmar Lehmann, Οι υπέροχοι αριθμοί Fibonacci, Prometheus Books, 2007.

Vera W. de Spinadel, Θεωρία Αριθμών και Τέχνη, ISAMA The International Εταιρεία των Τεχνών, των Μαθηματικών και της Αρχιτεκτονικής, 415–421.

Vera W. de Spinadel, Η οικογένεια των μεταλλικών μέσων,

<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/spinadel/>

Vera W. de Spinadel, Νέες ακολουθίες Smarandache. Στο: Πρακτικά της πρώτης διεθνές συνέδριο για τις έννοιες τύπου Smarandache στη θεωρία αριθμών, 21-24

Αύγουστος 1997. Lupton: Αμερικανικός ερευνητικός Τύπος. 1997, ISBN 1-879585-58-8,

81116.

Dan Pedoe, Γεωμετρία και Εικαστικές Τέχνες (Dover Books on Mathematics), Dover Publications, 2011, ISBN 978-0486244587.

Gabriele Cappellato, Nicoletta Sala, Συνδέσεις μεταξύ Μαθηματικών, Τεχνών και Αρχιτεκτονικής, Nova, 2019, ISBN: 978-1-53615-195-4.

BBC How Music Works, Μέρος 3 Αρμονία

<https://www.youtube.com/watch?v=KwRHu8T1ICs>

## 2. Πλαίσιο STEAME ACADEMY\*

Συνεργασία των  
Εκπαιδευτικών

**Δάσκαλος 1:** Καθηγητής Μαθηματικών – εξηγεί στους μαθητές τη βασική μαθηματική θεωρία της αρμονίας στη γεωμετρία και την άλγεβρα.

**Εκπαιδευτικός 2: Δάσκαλος Τέχνης** (δάσκαλος εικαστικών τεχνών, κατά προτίμηση με κάποια εμπειρία στη γραφιστική ή το σχεδιασμό λογοτύπου) – εξηγεί στους μαθητές πώς εφαρμόζεται η θεωρία της αρμονίας στις εικαστικές τέχνες εισάγοντάς τους σε έργα ζωγραφικής, γλύπτες, αρχιτέκτονες και ιστορικά αντικείμενα στα οποία μπορεί να βρεθεί η χρυσή τομή ή άλλα μεταλλικά μέσα.

**Δάσκαλος 3:** Καθηγητής πληροφορικής – ένας καθηγητής πληροφορικής (ή ο δάσκαλος τέχνης) εξηγεί στους μαθητές πώς ένα βασικό λογισμικό γραφιστικής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για απλό σχεδιασμό λογοτύπου.

**Δάσκαλος 4:** Καθηγητής Βιολογίας – εξηγεί στους μαθητές πώς η χρυσή αναλογία έχει ιδιαίτερη σημασία στη φύση, επειδή βρίσκεται σε διάφορες ζωντανές μορφές, συμπεριλαμβανομένου του ανθρώπινου σώματος.

**(Προαιρετικό) Δάσκαλος 5:** Δάσκαλος Μουσικής – εξηγεί στους μαθητές τις βασικές αρχές της δυτικής μουσικής αρμονίας – διαστήματα, αρμονικές (απόηχοι), τριάδες, πέμπτα, συγχορδίες (τριάδες – μείζονες και ελάσσονες τριάδες, τονωτικές, κυρίαρχες και υποκυρίαρχες συγχορδίες), πρόοδοι συγχορδιών και πώς να εναρμονίσουν μια απλή μελωδία. Εξηγεί επίσης πώς η χρυσή αναλογία έχει χρησιμοποιηθεί από τους συνθέτες για να προκαλέσει μια αίσθηση αρμονίας και ικανοποίησης στους ακροατές.

Οργάνωση STEAME in

Συνάντηση με επαγγελματίες σχεδιαστές γραφικών/λογοτύπων. Επίσκεψη σε στούντιο γραφιστικής.

**Βήμα 1. Απόκτηση θεωρητικών γνώσεων.** Οι μαθητές μαθαίνουν για τις θεωρητικές αρχές της αρμονίας στα μαθηματικά και πώς εφαρμόζονται στη βιολογία και τις τέχνες – εικαστικές τέχνες και μουσική.

**Βήμα 2. Απόκτηση δεξιοτήτων πληροφορικής.** Οι μαθητές μαθαίνουν για τις βασικές λειτουργίες του λογισμικού γραφιστικής και πώς να δημιουργήσουν ένα απλό λογότυπο ή ψηφιακό έργο τέχνης με τη βοήθειά του.

**Βήμα 3. Συζητήσεις και έμπνευση.** Οι μαθητές συζητούν μεταξύ τους και με τους καθηγητές τέχνης και μαθηματικών για την παρουσία αρμονίας, κυρίως τις χρυσές και ασημένιες αναλογίες, σε διάφορα σχήματα που δημιουργούνται από τον άνθρωπο ή τη φύση, επισκέπτονται γκαλερί τέχνης και μουσεία και αναλύουν ψηφιακά έργα τέχνης που βρίσκονται στο διαδίκτυο. Ένας επαγγελματίας γραφίστας εισάγει τους μαθητές σε ψηφιακά έργα τέχνης και εξηγεί τι τα κάνει ευχάριστα στο ανθρώπινο μάτι (εγκέφαλο). Οι μαθητές αντλούν έμπνευση από φυσικά σχήματα και έργα τέχνης για να δημιουργήσουν τα δικά τους σχέδια ενσωματώνοντας τις αρχές της αρμονίας. Για το σκοπό αυτό, μπορούν να δημιουργήσουν πίνακες οράματος (σε χαρτί ή ψηφιακούς δημιουργικούς πίνακες, για παράδειγμα σε Canva.com) για να τους βοηθήσουν να αναπτύξουν καλύτερα τις καλλιτεχνικές τους ιδέες και να εμπνευστούν.

**Βήμα 4. Γίνετε δημιουργικοί.** Οι μαθητές σχεδιάζουν και αναπτύσσουν τα έργα τέχνης τους που συνδέονται με τις χρυσές, ασημένιες ή άλλες μεταλλικές αναλογίες που καθοδηγούνται από τον δάσκαλο τέχνης και τον επαγγελματία γραφίστα. Ο σχεδιαστής εισάγει τους μαθητές στα βήματα που περιλαμβάνουν την υλοποίηση ενός τέτοιου σχεδίου σχεδιασμού για ένα απλό λογότυπο ή ψηφιακό σχέδιο τέχνης - από το σκίτσο της κύριας ιδέας έως τη σχεδιάσή της με λογισμικό υπολογιστή.

**Βήμα 5. Έκθεση έργων τέχνης και αξιολόγηση φοιτητών.** Οι μαθητές παρουσιάζουν τα έργα τους σε μια έκθεση και μοιράζονται με τους δασκάλους και τους συνομηλίκους τους πώς ενσωμάτωσαν τις αρχές της αρμονίας και τι τους ενέπνευσε να δημιουργήσουν τα έργα τους. Κάθε εκπαιδευτικός ακολουθεί τη μεθοδολογία του επιπέδου αξιολόγησης, δηλαδή αξιολογεί τις γνώσεις, την παρουσίαση και τις επικοινωνιακές δεξιότητες των μαθητών. Οι μαθητές μπορούν να ψηφίσουν για το καλύτερο σχέδιο.

\* υπό ανάπτυξη τα τελικά στοιχεία του πλαισίου

### 3. Στόχοι και μεθοδολογίες

**Μετά την ολοκλήρωση της εκπαίδευσης, οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν:**

- Πώς ορίζεται η αρμονία στα Μαθηματικά.
- Ποια είναι η χρυσή αναλογία, βασικές πληροφορίες σχετικά με τους αριθμούς Fibonacci και τη χρυσή σπείρα και πώς υπάρχουν σε διάφορα φυσικά σχήματα.
- Πώς μπορεί να γενικευτεί η χρυσή αναλογία για να ληφθούν άλλες αναλογίες, οι λεγόμενες μεταλλικές αναλογίες. Ποια γεωμετρικά σχήματα περιέχουν αυτές τις αναλογίες - χρυσά τρίγωνα, κανονικά πολύγωνα και άλλα. Γεωμετρικές μέθοδοι διαίρεσης γραμμικού

τιμήματος σε χρυσή αναλογία.

- Πώς οι μαθηματικές αρχές διέπουν αυτό που φαίνεται ευχάριστο στο ανθρώπινο μάτι (εγκέφαλος) - χρυσή αναλογία στα έργα τέχνης: πίνακες ζωγραφικής, γλυπτά και κτίρια, από την αρχαιότητα έως τη σημερινή ψηφιακή τέχνη.
- Πώς ορίζεται η αρμονία στη θεωρία της μουσικής. Ποιοι είναι οι βασικοί κανόνες της δυτικής μουσικής αρμονίας και πώς επηρεάζει τα συναισθήματά μας. Πώς οι μαθηματικές αρχές μας βοηθούν να καταλάβουμε τι ακούγεται ευχάριστο στο ανθρώπινο αυτί (εγκέφαλο).
- Πώς λειτουργεί το λογισμικό γραφιστικής και πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία απλού λογότυπου και ψηφιακού σχεδιασμού έργων τέχνης.

Μαθησιακά  
Αποτελέσματα και  
Αναμενόμενα  
Αποτελέσματα

Οι μαθητές κατανοούν τις βασικές μαθηματικές αρχές της αρμονίας και πού βρίσκονται στη ζωντανή φύση και τα διάσημα έργα τέχνης.

Απόκτηση βασικών δεξιοτήτων για λογισμικό γραφιστικής υπολογιστών.

**Μετά την ολοκλήρωση των μαθημάτων, οι φοιτητές θα είναι σε θέση να:**

- Να κατανοήσουν και να εξηγήσουν τις βασικές μαθηματικές αρχές της αρμονίας.
- Να εξηγήσει πώς λειτουργεί η μαθηματική θεωρία της αρμονίας στη φύση, τις εικαστικές τέχνες και τη μουσική.
- Για την ανάλυση έργων τέχνης για την παρουσία της χρυσής αναλογίας ή της αναλογίας αργύρου.
- Να δημιουργήσει και να χρησιμοποιήσει πίνακες οράματος για να τους βοηθήσει να αναπτύξουν μια καλλιτεχνική ιδέα.
- Να αντλήσει έμπνευση από τη φύση και τα έργα τέχνης.
- Για να δημιουργήσετε ένα απλό λογότυπο ή άλλο ψηφιακό έργο τέχνης με ένα λογισμικό γραφιστικής.

Προηγούμενες γνώσεις  
και Προαπαιτούμενα

**Οι φοιτητές θα πρέπει να είναι σε θέση να:**

- Για την επίλυση τετραγωνικών εξισώσεων και την εξοικείωση με παράλογους αριθμούς και συνεχή κλάσματα.
- Να κατέχουν γνώση βασικών γεωμετρικών σχημάτων – τριγώνων και κανονικών πολυγώνων.
- Να είμαστε δημιουργικοί και να δημιουργούμε νέες ιδέες.
- Για παρουσίαση σε ακροατήριο.

**Αναμενόμενα αποτελέσματα:**

- Καλύτερη και βαθύτερη κατανόηση των βασικών μαθηματικών ιδεών της αρμονίας και της σύνδεσής τους με τη βιολογία και τις τέχνες.
- Ψηφιακά έργα τέχνης αφιερωμένα στη χρυσή αναλογία ή την αναλογία αργύρου.

- Ανάπτυξη και ενίσχυση της μαθηματικής γνώσης και των αισθητικών αντιλήψεων.

Κίνητρα, Μεθοδολογία, Στρατηγικές, Υποστήριξη

Ένα σημαντικό καθήκον αυτού του σχεδίου είναι να αναπτύξει βαθύτερη κατανόηση της σημαντικής μαθηματικής έννοιας της αρμονίας, κυρίως μέσω της μάθησης για τη χρυσή αναλογία και πώς μπορεί να βρεθεί σε διάφορες μορφές της ζωντανής φύσης, συμπεριλαμβανομένου του ανθρώπινου σώματος, καθώς και σε διάσημα έργα τέχνης - πίνακες ζωγραφικής, γλυπτά, αρχιτεκτονική κ.λπ. Αυτά τα μαθήματα στοχεύουν να ενισχύσουν τις μαθηματικές γνώσεις των μαθητών και να υπογραμμίσουν τον κεντρικό ρόλο που διαδραματίζουν τα μαθηματικά στην εξερεύνηση, κατανόηση και διαμόρφωση του κόσμου γύρω μας. Ο άλλος κύριος στόχος αυτών των μαθημάτων είναι να ενισχύσουν τη δημιουργική σκέψη, την αισθητική και τις καλλιτεχνικές ικανότητες των μαθητών και να τους εμπνεύσουν να αναζητήσουν κρυφές συνδέσεις μεταξύ μαθηματικών και άλλων μαθημάτων. Τα μαθηματικά ως πηγή καλλιτεχνικής έμπνευσης. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται περιλαμβάνουν την εφαρμογή ενδοθεματικών συνδέσεων μεταξύ άλγεβρας και γεωμετρίας, καθώς και διεπιστημονικών συνδέσεων μεταξύ μαθηματικών, φυσικών επιστημών (βιολογία) και τεχνών. Οι μαθητές θα δημιουργήσουν τα δικά τους έργα τέχνης εφαρμόζοντας τις μαθηματικές αρχές της αρμονίας με τη βοήθεια λογισμικού ηλεκτρονικών υπολογιστών (IT). Το κύριο κίνητρο αυτού του σχεδίου είναι να χρησιμοποιήσει τα Μαθηματικά για να εμπνεύσει τους μαθητές να είναι πιο δημιουργικοί και να τους δείξει πόσο όμορφα είναι τα Μαθηματικά.

#### 4. Προετοιμασία και μέσα

Προετοιμασία, Διευθέτηση χώρου, Συμβουλές αντιμετώπισης προβλημάτων

Σε διαφορετικά στάδια της εργασίας, οι εκπαιδευτικοί αλλάζουν τον ηγετικό τους ρόλο. Στην αρχική περίοδο, ο επικεφαλής δάσκαλος είναι ο καθηγητής μαθηματικών που παρουσιάζει τις θεωρητικές γνώσεις σχετικά με την αρμονία στη γεωμετρία και την άλγεβρα. Δίνει διάφορα μαθηματικά προβλήματα στους μαθητές και τους διευκολύνει στην εξεύρεση των σωστών λύσεων. Στο επόμενο στάδιο, ο καθηγητής βιολογίας και τέχνης (αλλά και ο δάσκαλος μουσικής, προαιρετικά) παίζουν τον βασικό ρόλο εξηγώντας στους μαθητές πώς εφαρμόζονται οι μαθηματικές έννοιες της αρμονίας στα μαθήματά τους. Όλοι οι εκπαιδευτικοί (ο καθένας ανάλογα με τις ικανότητές του) συνεργάζονται με τους μαθητές για την επίλυση των προβλημάτων τους, αποδεικνύοντας έτσι τον διεπιστημονικό χαρακτήρα της μάθησης που βασίζεται σε έργα.

Πόροι, Εργαλεία, Υλικά, Επισυναπτόμενα, Εξοπλισμός

Χρησιμοποιούνται εκπαιδευτικές πηγές, ψηφιακό και έντυπο υλικό με τις σχετικές αναφορές που απαιτούνται για την υλοποίηση του σχεδίου μάθησης.

Οι μαθητές εργάζονται στην τάξη και σε εργαστήριο ηλεκτρονικών υπολογιστών ενώ αποκτούν νέες γνώσεις και δεξιότητες. Συζητούν μαζί ως ομάδα σε ένα κέντρο STEAM ή σε άλλο ασφαλές περιβάλλον με τους δασκάλους τους. Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να διαθέτουν κατάλληλους μαθησιακούς πόρους, όπως παρουσιάσεις, βίντεο, πρακτικά παραδείγματα κ.λπ. Μερικά υλικά και βίντεο που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αρχική παρακίνηση των μαθητών σχετικά με το θέμα είναι τα εξής:

- Χρυσή αναλογία στην τέχνη και τη φύση

<https://www.thecollector.com/what-is-the-golden-ratio-and-how-does->

[it-apply-to-art/](#)

- Χρυσή αναλογία στην τέχνη  
<https://blog.artsper.com/en/a-closer-look/golden-ratio-in-art/>
- PBS. Η Χρυσή Αναλογία: Μύθος ή Μαθηματικά;  
<https://www.youtube.com/watch?v=1Jj-sJ78O6M>
- Η μαγεία των αριθμών Fibonacci – Γιατί μαθαίνουμε μαθηματικά;  
<https://www.youtube.com/watch?v=SjSHVdfXHQ4>
- Mario Livio, Η χρυσή αναλογία και η αισθητική,  
<https://plus.maths.org/content/golden-ratio-and-aesthetics>
- Μεταλλικοί αριθμοί: Πέρα από τη χρυσή αναλογία:  
Μέρος 1: <https://plus.maths.org/content/silver-ratio>  
Μέρος 2: <https://plus.maths.org/content/part-ii>
- Dann Passoja, Παραλλαγές σε ένα θέμα της ασημένιας αναλογίας  
[https://www.researchgate.net/publication/288496866\\_Variations\\_on\\_a\\_Theme\\_of\\_the\\_Silver\\_Ratio](https://www.researchgate.net/publication/288496866_Variations_on_a_Theme_of_the_Silver_Ratio)
- Μουσική από τους αριθμούς Fibonacci  
<https://www.youtube.com/watch?v=IGJeGOW8TzQ>
- Αρμονία στη μουσική – <https://www.youtube.com/watch?v=KwRHu8T1Cs>

Οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν επίσης τις αναφορές στην πρώτη σελίδα αυτού του σχεδίου καθώς και:

- Πλατφόρμες επικοινωνίας και συνεργασίας - Google Meet, Google Classroom, Zoom, Skype κ.λπ.
- Πλατφόρμα ηλεκτρονικής μάθησης - Google classroom, Moodle κ.λπ.

Υγεία και Ασφάλεια

Οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί εργάζονται σε ένα υγιές και ασφαλές περιβάλλον.

## 5. Εφαρμογή

Μαθησιακές δραστηριότητες, Διαδικασίες, Αναστοχασμοί

Αυτό το σχέδιο αναπτύσσεται με έμφαση σε μαθήματα Μαθηματικών, Πληροφορικής, Βιολογίας, Τεχνών ή σε μια λέσχη ενδιαφέροντος STEAME. Καλύπτει τα αντικείμενα σπουδών:

- Μαθηματικά
- Βιολογία
- Τέχνη, Ψηφιακή Τέχνη, Γραφιστική
- Δεξιότητες παρουσίασης και επικοινωνίας

Οι εκπαιδευτικοί σχεδιάζουν τις δραστηριότητές τους στο περιβάλλον Google χρησιμοποιώντας το Ημερολόγιο Google και το Google Classroom ως μέρος του προγράμματος σπουδών. Οι μαθητές συμμετέχουν ενεργά μέσω πρακτικής

εμπειρίας και έρευνας που διεξάγεται ως ανεξάρτητη εργασία που μπορεί να συζητηθεί στην τάξη.

Υπάρχουν 18 ώρες μελέτης που βασίζονται σε ένα μάθημα 40 λεπτών. Όλα τα μαθήματα πραγματοποιούνται μία ή δύο φορές την εβδομάδα με πρόγραμμα σπουδών για 9-18 συνεχόμενες εβδομάδες.

- 3 ώρες για τη μαθηματική θεωρία της αρμονίας
- 2 ώρες για αρμονία στις τέχνες – η χρυσή και ασημένια αναλογία σε διάσημα έργα τέχνης
- 1 ώρα για χρυσή αναλογία σε σχήματα ζωντανών οργανισμών (βιολογία)
- 2 ώρες για μουσική αρμονία
- 1 ώρα για επίσκεψη σε γκαλερί τέχνης ή μουσείο
- 3 ώρες για την εκμάθηση των βασικών ενός λογισμικού γραφιστικής
- 2 ώρες για συνάντηση με επαγγελματία γραφίστα, επίσκεψη σε στούντιο γραφιστικής
- 3 ώρες για τη δημιουργία ενός απλού λογότυπου ή ψηφιακού έργου τέχνης εμπνευσμένου από τη χρυσή αναλογία, την αναλογία αργύρου ή άλλες αρχές αρμονίας
- 1 ώρα για έκθεση των έργων των μαθητών

#### Αξιολόγηση

Η παρουσίαση των τελικών αποτελεσμάτων πραγματοποιείται μπροστά στους εκπαιδευτικούς, τον επαγγελματία γραφίστα και τους συμμαθητές τους σε μια σχολική έκθεση όπου κάθε μαθητής παρουσιάζει το ψηφιακό έργο τέχνης που δημιούργησαν και εξηγεί πώς αντικατοπτρίζει τις αρχές της αρμονίας που έμαθαν από τα μαθήματα μαθηματικών, βιολογίας και τέχνης και από πού αντλούσαν την έμπνευσή τους. Κάθε παρουσίαση αξιολογείται από τους καθηγητές και τον γραφίστα. Βασικοί παράγοντες είναι: οι θεωρητικές γνώσεις του φοιτητή, το βάθος των γνώσεων, η εφαρμογή θεωρητικών εννοιών, οι δεξιότητες επικοινωνίας και παρουσίασης και η αισθητική του σχεδιασμού.

#### Παρουσίαση - Αναφορά - Διαμοιρασμός

Οι ολοκληρωμένες εργασίες των μαθητών εκτυπώνονται σε χαρτί και παρουσιάζονται από αυτούς στους εκπαιδευτικούς και τους συνομηλίκους τους σε σχολική έκθεση. Τα έργα των μαθητών σε ψηφιακή μορφή δημοσιεύονται στην ιστοσελίδα του σχολείου και στους λογαριασμούς κοινωνικών μέσων. Τα σχέδια μπορούν να χρησιμοποιηθούν από εκπαιδευτικούς ως παραδείγματα για άλλα έργα τέχνης.

#### Επεκτάσεις - Άλλες πληροφορίες

--

**STEAME ACADEMY Πρωτότυπο/Οδηγός για τη μάθηση και τη δημιουργικότητα Προσέγγιση  
Διαμόρφωση σχεδίου δράσης**

Σημαντικά βήματα της μαθησιακής προσέγγισης STEAME:

## **ΣΤΑΔΙΟ I: Προετοιμασία από έναν ή περισσότερους εκπαιδευτικούς**

- 1. Διατύπωση αρχικών σκέψεων για τους θεματικούς τομείς/περιοχές που θα καλυφθούν:**  
*Δύο σημαντικά προβλήματα της πραγματικής ζωής οδήγησαν στην ανάπτυξη των Μαθηματικών σε όλη την ιστορία του ανθρώπινου πολιτισμού – η καταμέτρηση που βοήθησε στην ανάπτυξη των αριθμητικών συστημάτων, της αριθμητικής και της άλγεβρας, και η μέτρηση των ποσοτήτων (περίμετροι, περιοχές, όγκοι κ.λπ.) που είναι υπεύθυνη για την ανάπτυξη της γεωμετρίας. Αλλά υπάρχει ένα τρίτο σημαντικό πρόβλημα στα Μαθηματικά που αντικατοπτρίζει επίσης τη σημασία τους στις φυσικές επιστήμες (βιολογία) και τις τέχνες – η μαθηματική θεωρία της αρμονίας. Στα Μαθηματικά, η αρμονία νοείται ως ισότητα ή αναλογικότητα των μερών μεταξύ τους και των μερών με το σύνολο. Η γενικότερα, η αρμονία ενός αντικειμένου είναι μια αναλογικότητα των μερών και του συνόλου, μια συγχώνευση των διαφόρων συστατικών του αντικειμένου για να δημιουργηθεί ένα ομοιόμορφο οργανικό σύνολο. Στόχος των μαθημάτων αυτών είναι να εισαγάγουν τους φοιτητές στην έννοια της αρμονίας στα Μαθηματικά, την ιστορική της εξέλιξη και να εξηγήσουν πώς βρίσκει εφαρμογές στη βιολογία, τη μουσική και τις εικαστικές τέχνες. Η μαθηματική θεωρία επικεντρώνεται κυρίως στη χρυσή αναλογία και τις γενικεύσεις της, τα λεγόμενα μεταλλικά μέσα, που ορίζονται από την Αργεντινή μαθηματικό Vera W. de Spinadel το 1998, εκ των οποίων η αναλογία αργύρου είναι η πιο δημοφιλής και βρίσκεται στα έργα τέχνης και την αρχιτεκτονική. Στη γεωμετρία διερευνώνται οι συνδέσεις μεταξύ της χρυσής και της αργυρής αναλογίας και ορισμένων τριγώνων και κανονικών πολυγώνων, και στην άλγεβρα οι συνδέσεις μεταξύ αυτών των δύο λόγων και των αριθμών Fibonacci και Pell, αντίστοιχα.*
- 2. Εμπλοκή στον κόσμο του ευρύτερου περιβάλλοντος / εργασίας / επιχείρησης / γονέων / κοινωνίας / περιβάλλοντος / ηθικής:**  
*Ένας επαγγελματίας γραφίστας σχεδιάζεται να συμμετάσχει ως μέντορας / δάσκαλος. Οι επισκέψεις σε γκαλερί τέχνης, μουσεία και στούντιο γραφιστικής προγραμματίζονται ως δραστηριότητες εκτός τάξης.*
- 3. Ηλικιακή Ομάδα-Στόχος Μαθητών - Συσχέτιση με το Επίσημο Πρόγραμμα Σπουδών - Καθορισμός Σκοπών και Στόχων**  
*Το θέμα προορίζεται για μαθητές των τάξεων 8-9 της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στα μαθήματα μαθηματικών της 8ης τάξης (στα βουλγαρικά σχολεία δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης), οι μαθητές μαθαίνουν πρώτα για τους άρρητους αριθμούς (τετραγωνικές ρίζες) και στη συνέχεια εισάγονται στην τετραγωνική εξίσωση και τον τύπο Brahmagupta για την εξεύρεση των λύσεων της. Καθώς η χρυσή αναλογία και οι άλλες μεταλλικές αναλογίες είναι θετικές ρίζες τετραγωνικών εξισώσεων, αυτό το υλικό είναι κατάλληλο για 8ους γκρέιντερ. Πολύ βασικές γνώσεις γραφικών υπολογιστών και δεξιότητες για την εργασία με αρχεία εικόνας διδάσκονται στην 6η τάξη (βουλγαρικό σχολείο), αλλά αυτές οι γνώσεις πρέπει να επεκταθούν για τους σκοπούς αυτών των μαθημάτων.*
- 4. Οργάνωση των καθηκόντων των εμπλεκόμενων μερών - Ορισμός συντονιστή - Χώροι εργασίας κ.λπ.**  
*Οι εκπαιδευτικοί οργανώνουν την κατάρτιση και υποστηρίζουν το έργο των μαθητών. παρακινούν τους μαθητές και θέτουν ένα πραγματικό καθήκον προς εκπλήρωση. Η διεύθυνση του σχολείου υποστηρίζει τη διοργάνωση συναντήσεων με γραφίστες, την εξωσχολική οργάνωση της εργασίας, καθώς και την παρουσίαση των αποτελεσμάτων σε κατάλληλο κοινό. Ο καθηγητής μαθηματικών μπορεί να παίξει το ρόλο του συντονιστή. Οι χώροι εργασίας που θα χρησιμοποιηθούν είναι μια τάξη και ένα εργαστήριο υπολογιστών.*

## **ΣΤΑΔΙΟ II: Διαμόρφωση Σχεδίου Δράσης (Βήματα 1-18)**

Προετοιμασία (από εκπαιδευτικούς)

### **1. Σχέση με τον πραγματικό κόσμο – Προβληματισμός**

*Διάφορα σχήματα ζωντανών οργανισμών περιέχουν τη χρυσή αναλογία, τους αριθμούς Fibonacci και τη χρυσή σπείρα. Η λεγόμενη «θεϊκή αναλογία» από τον Luca Pacioli μπορεί να βρεθεί και στο ανθρώπινο σώμα. Οι χρυσές και ασημένιες αναλογίες ενσωματώνονται σε διάσημα έργα τέχνης - πίνακες ζωγραφικής, γλυπτά, κτίρια κ.λπ.*

### **2. Κίνητρα – Κίνητρα**

*Οι καθηγητές μαθηματικών, βιολογίας, καλλιτεχνικών και μουσικής εισάγουν τους μαθητές στην έννοια της αρμονίας στα μαθήματά τους, η οποία συνδέεται με τη μαθηματική θεωρία της αρμονίας που έθεσαν ο Πυθαγόρας και ο Ευκλείδης. Ένας επαγγελματίας γραφίστας καθοδηγεί τους μαθητές στη διαδικασία δημιουργίας του δικού τους έργου τέχνης με βάση τη χρυσή, ασημένια ή άλλη μεταλλική αναλογία και τις αρχές της αρμονίας στην τέχνη και τα μαθηματικά. Οι μαθητές παρακινούνται από την αναζήτηση της αρμονίας στον κόσμο γύρω μας που δημιουργήθηκε από τον άνθρωπό μου ή από τη φύση. Στη δημιουργική τους προσπάθεια εμπνέονται οι μαθηματικές μου γνώσεις.*

### **3. Διατύπωση προβλήματος (ενδεχομένως σε στάδια ή φάσεις) που προκύπτει από τα παραπάνω**

*Οι μαθητές εισάγονται αρχικά στην έννοια της αρμονίας από τον καθηγητή μαθηματικών, ο οποίος μπορεί να τους δείξει εικόνες λουλουδιών και ζώων, έργων τέχνης και κτιρίων και να τους ρωτήσει αν βρίσκουν τα εικονιζόμενα σχήματα ευχάριστα στο μάτι και αν ναι, τότε γιατί. Ο/η εκπαιδευτικός μπορεί να υπενθυμίσει στους μαθητές τις αναλογίες. Έτσι, εισάγοντάς τους στη χρυσή αναλογία και στη συνέχεια στον γεωμετρικό και αλγεβρικό ορισμό της. Μια άλλη ερώτηση που μπορεί να κάνει ο δάσκαλος πριν ξεκινήσει με το μάθημα των μαθηματικών είναι αν οι μαθητές πιστεύουν ότι τα μαθηματικά έχουν κάποια σχέση με την αισθητική.*

*Ανάπτυξη (από μαθητές) – Καθοδήγηση & Αξιολόγηση (9-11, από εκπαιδευτικούς)*

### **4. Δημιουργία φόντου - αναζήτηση / συλλογή πληροφοριών:**

*Νέες γνώσεις εφαρμόζονται κατά την επίλυση προβλημάτων. Οι μαθητές ενθαρρύνονται να αναζητήσουν μόνοι τους πληροφορίες και πηγές έμπνευσης για το τελικό δημιουργικό έργο. Οι μαθητές μπορούν να δημιουργήσουν πραγματικούς ή ψηφιακούς (δημιουργικούς) πίνακες με τις εικόνες και τις πληροφορίες που βρήκαν στο διαδίκτυο.*

### **5. Απλοποιήστε το πρόβλημα - Διαμορφώστε το πρόβλημα με περιορισμένο αριθμό απαιτήσεων**

*Η εργασία δηλώνεται σαφώς με τις απαραίτητες πληροφορίες.*

### **6. Case Making - Σχεδιασμός - προσδιορισμός υλικών για την κατασκευή / ανάπτυξη / δημιουργία**

*Η εργασία που λαμβάνουν οι μαθητές είναι σαφώς καθορισμένη.*

### **7. Κατασκευή - Ροή εργασιών - Υλοποίηση έργων**

*Εισαγωγική εκπαίδευση με σχετικά παραδείγματα - Θέτοντας ένα πραγματικό πρόβλημα - Πρόσθετη εκπαίδευση - Βρίσκοντας μια λύση στο πρόβλημα - Παρουσίαση των αποτελεσμάτων*

### **8. Παρατήρηση-Πειραματισμός - Αρχικά Συμπεράσματα**

*Οι μαθητές επιλύουν μαθηματικά προβλήματα καθοδηγούμενοι από τον καθηγητή μαθηματικών και πειραματίζονται με δημιουργικές ιδέες καθοδηγούμενοι από τον καθηγητή τέχνης και έναν επαγγελματία γραφίστα.*

### **9. Τεκμηρίωση - Αναζήτηση Θεματικών Περιοχών (TN) σχετικών με το υπό μελέτη αντικείμενο – Επεξήγηση βάσει Υφιστάμενων Θεωριών ή/και Εμπειρικών Αποτελεσμάτων**

*Οι μαθητές έχουν τις απαραίτητες θεωρητικές πληροφορίες και παραδείγματα.*

### **10. Συγκέντρωση αποτελεσμάτων / πληροφοριών βάσει των σημείων 7, 8, 9**

*Σε κάθε βήμα, οι εκπαιδευτικοί αναφέρουν την πρόοδο των μαθητών.*

### **11. Πρώτη ομαδική παρουσίαση από μαθητές**

Οι μαθητές παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της εργασίας τους σε μια σχολική έκθεση και εξηγούν τις αρχές της αρμονίας που εφάρμοσαν για τη δημιουργία της.

Διαμόρφωση & Αποτελέσματα (από μαθητές) – Καθοδήγηση & Αξιολόγηση (από εκπαιδευτικούς)

12. Διαμορφώστε τα μοντέλα STEAME για να περιγράψετε / αναπαραστήσετε / απεικονίσετε τα αποτελέσματα
13. Μελετώντας τα αποτελέσματα σε 9 και εξάγοντας συμπεράσματα, χρησιμοποιώντας 12
14. Εφαρμογές στην Καθημερινή Ζωή - Προτάσεις για Ανάπτυξη 9 (Επιχειρηματικότητα - SIL Days)

Ανασκόπηση (από εκπαιδευτικούς)

15. Επανεξετάστε το πρόβλημα και αναθεωρήστε το υπό πιο απαιτητικές συνθήκες  
Ολοκλήρωση Εργασιών (από μαθητές) – Καθοδήγηση & Αξιολόγηση (από εκπαιδευτικούς)
16. Επαναλάβετε τα βήματα 5 έως 11 με πρόσθετες ή νέες απαιτήσεις, όπως διατυπώνονται στο σημείο 15
17. Διερεύνηση - Μελέτες περιπτώσεων - Επέκταση - Νέες θεωρίες - Δοκιμή νέων συμπερασμάτων
18. Παρουσίαση Συμπερασμάτων - Επικοινωνιακών Τακτικών.

## STAGE III: STEAME ACADEMY Δράσεις και Συνεργασία σε Δημιουργικά Έργα για μαθητές σχολείων

Τίτλος έργου: Αρμονία – η ομορφιά των μαθηματικών

Σύντομη Περιγραφή/Περίγραμμα Οργανωτικών Ρυθμίσεων / Ευθυνών για Δράση

ΣΤΑΔΙΟ	Δραστηριότητες/Βήματα Εκπαιδευτικός 1(T1) Συνεργασία με T2, T3 και καθοδήγηση μαθητών	Δραστηριότητες /Βήματα Από Φοιτητές Ηλικιακή ομάδα: 14-15	Δραστηριότητες /Βήματα Δάσκαλος 2 (T2) Συνεργασία με τους T1, T3 και Καθοδήγηση μαθητών
Ένας	Προετοιμασία των βημάτων 1,2,3		Συνεργασία στο στάδιο 1,2,3
B	Καθοδήγηση στο βήμα 9	4,5,6,7,8,9,10	Οδηγίες υποστήριξης στο βήμα 9
C	Δημιουργική Αξιολόγηση	11	Δημιουργική Αξιολόγηση
D	Καθοδήγηση	12	Καθοδήγηση
E	Καθοδήγηση	13 (9+12)	Καθοδήγηση
F	Οργάνωση (SIL) Το STEAME στη ζωή	14 Συνάντηση με εκπροσώπους επιχειρήσεων	Οργάνωση (SIL) Το STEAME στη ζωή
G	Προετοιμασία του βήματος 15		Συνεργασία στο βήμα 15
H	Καθοδήγηση	16 (επανάληψη 5-11)	Καθοδήγηση υποστήριξης
Εγώ	Καθοδήγηση	17	Καθοδήγηση υποστήριξης
K	Δημιουργική Αξιολόγηση	18	Δημιουργική Αξιολόγηση