



Proiect finanțat de Uniunea Europeană. Opiniile și părerile exprimate aparțin exclusiv autorului (autorilor), care își asumă întreaga responsabilitate pentru acestea, și nu le reflectă în mod necesar pe cele ale Uniunii Europene sau ale Agenției Executive pentru Educație și Cultură a Uniunii Europene (EACEA).

## ACADEMIA STEAME

### PLAN DE ÎNVĂȚARE ȘI CREATIVITATE – NIVELUL 1. PROFESORI ÎNCEPĂTORI: **Rezolvarea problemelor folosind ecuații diofantiene**

**S**

**T**

**Eng**

**A**

**M**

**Ent**



#### 1. Prezentare generală

|                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                           |                                                        |
|---------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| Titlu                                             | <b>Rezolvarea problemelor cu Diophantus – Modelarea cu ecuații diofantiene liniare</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                           |                                                        |
| Întrebare sau temă pentru provocarea curiozității | <i>Cine este Diophantus din Alexandria și de ce este numit „părintele algebrei”? Ce este o ecuație diofantică? Cum se rezolvă ecuația diofantică liniară? Cum pot fi aplicate ecuațiile diofantiene liniare a două sau mai multe variabile la modelarea și rezolvarea problemelor din chimie, fizică sau inginerie (fluxuri de rețea), antreprenariat (afaceri) și în viața de zi cu zi? Cum poate fi aplicată informatica la rezolvarea ecuațiilor diofantiene liniare?</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                           |                                                        |
| Vârste, clase, ...                                | 12-13 ani                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Clasele 6-7                               |                                                        |
| Durată, calendar, activități                      | 10 lecții                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 10 lecții, fiecare cu o durată de 40 min. | 1 lecție pe săptămână timp de 10 săptămâni consecutive |
| Alinierea la ariile curriculare                   | <p>Matematică, chimie, fizică sau inginerie, criptografie, antreprenariat, informatică (Excel sau alt software care folosește foi de calcul)</p> <p>O problemă importantă în teoria numerelor o reprezintă ecuațiile diofantiene liniare. În timpul acestor lecții, elevii vor învăța despre Diophantus din Alexandria, cunoscut ca „părintele algebrei”, și despre ecuațiile diofantiene liniare. Ei vor învăța cum ecuațiile diofantiene liniare (omogene și neomogene) sunt rezolvate folosind diferite metode – cu ajutorul regulilor de divizibilitate, metoda de găsim a unei anumite soluții cu algoritmul euclidian extins pentru cel mai mare divizor comun și apoi scrierea formulelor pentru soluția generală și folosind metoda de substituție a lui Euler (separarea părților întregi și fracționare într-o expresie analitică). Elevii vor discuta despre numărul de soluții ale unor astfel de ecuații – soluții exprimate în numere naturale și în numere întregi. De asemenea, vor afla despre problema monedei Frobenius și generalizările sale. Elevii vor învăța cum să rezolve ecuații diofantiene liniare neomogene în Excel folosind formula Solver cu constrângeri (sau alt software</p> |                                           |                                                        |

|                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|-------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                         | <p>de foi de calcul) sau să rezolve astfel de ecuații cu aplicații web. Elevii vor învăța de asemenea cum să construiască modele matematice de probleme la chimie (egalarea ecuațiilor chimice), fizică sau inginerie (fluxuri de rețea), antreprenariat (probleme de afaceri) și probleme din viața de zi cu zi folosind ecuații diofantiene liniare neomogene cu două sau mai multe variabile.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| Colaboratori, Parteneri | <p><i>(Opțional) Un inginer de rețea profesionist.</i></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| Rezumat                 | <p><i>Cursul începe cu explicarea teoriei matematice a ecuațiilor diofantiene liniare. Profesorul de matematică amintește de teoria numerelor de bază (învățată în clasa a 5-a) – regulile de divizibilitate și algoritmul euclidian pentru găsirea celui mai mare divizor comun pentru două numere întregi pozitive. Profesorul de matematică poate începe să prezinte noul material propunându-le elevilor o problemă simplă, din viața de zi cu zi, care poate fi modelată printr-o ecuație diofantiană liniară neomogenă a două variabile. Profesorul îi ghidează pe elevi în crearea modelului și găsirea soluțiilor la ecuația obținută. Elevii folosesc reguli de divizibilitate pentru a rezolva ecuația. Apoi, profesorul le prezintă elevilor termenul „ecuație diofantiană”, în special ecuațiile diofantiene liniare cu două variabile (<math>ax + by = c</math>) și subliniază diferențele dintre o ecuație liniară cu o variabilă și o ecuație multivariabilă nedefinită. Profesorul le prezintă elevilor metodele de bază pentru rezolvarea ecuațiilor diofantiene liniare neomogene: prin utilizarea regulilor de divizibilitate, prin utilizarea algoritmului euclidian extins pentru găsirea unei anumite soluții și apoi scrierea formulelor pentru soluția generală și prin metoda de substituție a lui Euler. Discută cu elevii condiția necesară și suficientă pentru ca o astfel de ecuație să aibă soluții întregi, numărul de soluții întregi și numărul de soluții exprimate prin numere naturale (constrânse la variabilele exprimate prin inegalități liniare). Profesorul demonstrează, de asemenea, cum se rezolvă o ecuație diofantiană liniară cu mai mult de două variabile, apoi le prezintă elevilor problema monedei Frobenius și generalizările sale. Elevilor mai avansați și mai curioși, profesorul le poate explica relația dintre ecuațiile diofantiene liniare și congruențe, adică modul în care o astfel de ecuație poate fi exprimată sub forma unei congruențe liniare. Profesorul poate explica, de asemenea, cum ecuațiile diofantiene liniare pot fi aplicate la rezolvarea problemelor simple în criptografie.</i></p> <p><i>În continuare, profesorul de informatică le prezintă elevilor metodele care pot fi utilizate pentru rezolvarea ecuațiilor diofantiene liniare neomogene în Excel.</i></p> <p><i>Profesorul de chimie le demonstrează elevilor cum să egaleze o ecuație chimică care exprimă o reacție chimică și, împreună cu profesorul de matematică, explică cum să aplice ecuații diofantiene liniare neomogene pentru egalarea unei ecuații chimice.</i></p> <p><i>Profesorul de fizică (inginerie) le prezintă elevilor informații despre rețele și fluxuri de rețea. Opțional, administrația școlii poate invita un inginer (de rețea) pentru a le prezenta elevilor rețelele și problemele care pot apărea în fluxul de rețea. Profesorul de matematică și profesorul de fizică le explică elevilor cum pot fi folosite ecuațiile diofantiene liniare pentru modelarea unui flux într-o rețea.</i></p> <p><i>Profesorul de antreprenariat le propune elevilor probleme de afaceri, care pot fi modelate cu ajutorul ecuațiilor diofantiene liniare neomogene. Elevii pot</i></p> |

rezolva ecuațiile obținute fie manual, folosind metodele învățate la orele de matematică, fie într-un software de calcul.

Timpul alocat pentru acest proiect: 10 ore.

## Referințe, mulțumiri

Diophantus din Alexandria

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Strick/diophantus.pdf>

Alfred S. Posamentier, Robert Geretschläger, Charles Li, and Christian Spreitzer, The Joy of Mathematics: Marvels, Novelties, and Neglected Gems That Are Rarely Taught in Math Class, Prometheus Books, 2017, ISBN 9781633882980.

Elizabeth Mauch and Yixun Shi, Application of linear Diophantine equations in teaching mathematical thinking, Mathematics and Computer Education, Vol. 37, Iss. 2, (Spring 2003): 240-247.

Titu Andreescu, Ion Cucurezeanu, Dorin Andrica, An Introduction to Diophantine Equations, Birkhauser, 2010, ISBN 978-0-8176-4548-9.

Titu Andreescu, Dorin Andrica, Number Theory – Structures, Examples, and Problems, Birkhauser, 2009, ISBN: 978-0-8176-3245-8.

Lupu Costică. Methods of Solving Diophantine Equations in Secondary Education in Romania. Science Journal of Education, Vol. 2, No. 1, 2014, pp. 22-32. doi: 10.11648/j.sjedu.20140201.14.

<https://sites.millersville.edu/bikenaga/number-theory/linear-diophantine-equations/linear-diophantine-equations.html>

Teoria numerelor – Ecuații diofantiene

<https://www.math.utoronto.ca/beni/putnam/2020/2020-NT-diophantine-equations.pdf>

Jeffrey Shallit, The Frobenius Problem and Its Generalizations, <https://cs.uwaterloo.ca/~shallit/Talks/frob14.pdf>

Matthias Beck, How to change coins, M&M's, or chicken nuggets: the linear Diophantine problem of Frobenius, Chapter in Resources for Teaching Discrete Mathematics Classroom Projects, History Modules, and Articles , pp. 65 - 74

DOI: <https://doi.org/10.5948/UPO9780883859742.011>.

<https://matthbeck.github.io/papers/frobprojects.pdf>

Nadeem Aslam, Jay Villanueva, Solving Diophantine problems by Excel

<https://www.pearson.com/content/dam/one-dot-com/one-dot-com/us/en/files/ICTCM20-Proceedings-Aslam-Villanueva.pdf>

DR.R.ANBUSELVI, J.SIVASANKARI, Applications of Diophantine equations in chemical equations, JETIR June 2019, Volume 6, Issue 6, 371-373.

Deepinder Kaur, Meenal Sambhor, Diophantine Equations and its Applications in Real Life, International Journal of Mathematics And its Applications

Volume 5, Issue 2-B (2017), 217-222, ISSN: 2347-1557.

Rania. B. M. Amer, The Mathematical Analysis of Linear Diophantine Equations with Two and Three Variables and Its Applications, The Egyptian International

Journal of Engineering Sciences and Technology, Vol. 42 (2023) 23–28,

DOI: 10.21608/eijest.2022.164811.1185.

Mark Kenneth C. Engcot, Cryptography Using Linear Diophantine Equation, International Journal of Recent Research in Mathematics Computer Science and Information Technology, Vol. 9, Issue 1, pp: (28-33), Month: April 2022-September 2022.

R. Radha, G. Janaki, Applications Of Diophantine Equations In Chemical Reactions And Cryptography, Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, Vol.12No.7 (2021), 3175-3178.

Congruențe și ecuații liniare diofantiene:

[https://math.libretexts.org/Bookshelves/Combinatorics\\_and\\_Discrete\\_Mathematics/Yet\\_Another\\_Introductory\\_Number\\_Theory\\_Textbook\\_-\\_Cryptology\\_Emphasis\\_\(Poritz\)/02%3A\\_Congruences/2.02%3A\\_Linear\\_Congruences](https://math.libretexts.org/Bookshelves/Combinatorics_and_Discrete_Mathematics/Yet_Another_Introductory_Number_Theory_Textbook_-_Cryptology_Emphasis_(Poritz)/02%3A_Congruences/2.02%3A_Linear_Congruences)

David C. Lay, Linear Algebra and its Applications, 3rd Edition, Pearson's Publishing House, 2002

## 2. Cadrul de competențe STEAME ACADEMY\*

Cooperarea dintre profesori

**Profesorul nr. 1:** Profesor de matematică – explică teoria matematică a ecuațiilor diofantiene liniare neomogene a două și mai multe variabile, metode de găsire a soluțiilor acestora și modul în care acestea sunt aplicate pentru modelarea și rezolvarea problemelor din viața de zi cu zi. Realizează o introducere în problematica monedelor Frobenius.

**Profesorul nr. 2:** Profesor de informatică – le explică elevilor cum pot fi rezolvate ecuațiile diofantiene liniare neomogene în foi de calcul MS Excel sau alte programe similare. Realizează o prezentare a aplicațiilor web folosite pentru rezolvarea unor astfel de ecuații.

**Profesorul nr. 3:** Profesor de chimie – le explică elevilor teoria ecuațiilor chimice și cum să egaleze o ecuație chimică.

**Profesorul nr. 4:** Profesor de fizică (inginerie) – îi învață pe elevi despre rețele și fluxuri de rețea.

**Profesorul nr. 5:** Profesor de antreprenariat – le prezintă elevilor probleme de afaceri care pot fi modelate și rezolvate cu ajutorul ecuațiilor diofantiene liniare.

STEAME în viața de zi cu zi. Organizare

(Opțional) Administrația școlii poate organiza o întâlnire cu un inginer de rețea, care poate fi invitat să le explice elevilor cum sunt modelate și rezolvate problemele referitoare la fluxul de rețea.

Plan de acțiune

**Pasul 1. Dobândirea cunoștințelor teoretice.** Elevii învață despre teoria matematică a ecuațiilor diofantiene liniare neomogene și metodele de găsire a soluțiilor pentru acestea.

**Pasul 2. Dobândirea abilităților informatice.** Elevii învață cum să folosească Excelul sau alte programe cu foi de calcul pentru a rezolva ecuații diofantiene liniare.

**Pasul 3. Modelare și aplicații.** Elevii învață cum pot fi modelate și rezolvate probleme în chimie (egalarea ecuațiilor chimice), fizică sau inginerie (fluxuri în rețele) și antreprenariat (afaceri) cu ajutorul ecuațiilor diofantiene liniare.

**Pasul 4. Prezentarea proiectului final și evaluarea.** Fiecare elev alege unul sau mai multe dintre domeniile în care se folosesc ecuații diofantiene liniare – chimie, inginerie, afaceri sau viața de zi cu zi și rezolvă o problemă în acest domeniu (sau domenii) prin modelarea cu ajutorul unei ecuații diofantiene liniare. Fiecare elev rezolvă ecuația obținută, folosind una dintre metodele învățate la orele de matematică și un software de calcul (sau aplicație web). Elevii prezintă, în fața profesorilor și a colegilor lor, problema la care au lucrat și soluțiile obținute. Fiecare profesor urmează metodologia nivelului de evaluare, adică evaluează cunoștințele, abilitățile analitice și abilitățile de prezentare și comunicare ale elevilor.

*\* în curs de elaborare, elementele finale ale cadrului de competențe*

### 3. Obiective și metodologie

Scopuri și obiective de învățare

**După finalizarea cursului, elevii trebuie să știe:**

- Ce este o ecuație diofantiană.
- Ce este o ecuație diofantiană liniară. Cele două tipuri de bază de ecuații diofantiene liniare – omogenă și neomogenă și când o ecuație diofantiană liniară neomogenă este rezolvabilă cu numere întregi.
- Ce metode sunt utilizate pentru rezolvarea ecuațiilor diofantiene liniare neomogene.
- Cum sunt rezolvate ecuațiile diofantiene liniare neomogene cu numere întregi pozitive în Excel sau folosind un alt program de foi de calcul.
- Cum pot fi utilizate ecuațiile diofantiene liniare neomogene pentru modelarea problemelor din domeniul științelor naturii, ingineriei, afacerilor și din viața de zi cu zi.

Rezultatele învățării și rezultatele așteptate

Elevii vor acumula cunoștințe despre metodele utilizate pentru rezolvarea ecuațiilor diofantiene liniare și vor fi capabili să rezolve astfel de ecuații de sine stătător și cu ajutorul MS Excel. Elevii vor fi capabili să modeleze probleme simple din următoarele domenii: chimie, inginerie, afaceri și viața de zi cu zi folosind ecuații diofantiene liniare neomogene cu două sau mai multe variabile.

**La finalizarea cursului, elevii vor fi capabili să:**

- Înțeleagă și să explice metodele de bază utilizate pentru rezolvarea ecuațiilor diofantiene liniare.
- Rezolve ecuații diofantiene liniare într-un software cu foi de calcul precum MS Excel.
- Modeleze probleme din domeniul chimiei (să egaleze ecuații chimice), ingineriei rețelilor (fluxuri în rețele), afacerilor și al vieții de zi cu zi cu ajutorul ecuației diofantiene liniare neomogene cu două sau mai multe

|                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|-----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Cunoștințe anterioare și condiții prealabile</p> | <p>variabile.</p> <p><b>Elevii ar trebui să fie capabili să:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- rezolve ecuații liniare și inegalități liniare cu o variabilă.</li> <li>- posede cunoștințe despre regulile de divizibilitate și să știe cum să găsească cel mai mare divizor comun a două numere întregi pozitive prin algoritmul euclidian.</li> <li>- aibă cunoștințe de bază despre cum să utilizeze un software cu foi de calcul precum Excel.</li> <li>- pregătească o prezentare (PPT sau alt format) și s-o prezinte unui public.</li> </ul> <p><b>Rezultate așteptate:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Înțelegerea mai bună și mai profundă a principiilor matematicii și a noțiunilor matematice.</li> <li>- Dezvoltarea abilităților analitice prin modelarea ecuațiilor cu mai multe variabile și aplicarea diferitelor metode pentru obținerea soluțiilor acestora.</li> <li>- Dezvoltarea abilităților informatice prin utilizarea unui software de calcul pentru rezolvarea ecuațiilor.</li> <li>- O mai bună înțelegere a modului în care matematica este aplicată în alte științe, inginerie, afaceri și a faptului că, pentru a rezolva probleme din viața de zi cu zi, vor fi necesare, adesea, și cunoștințele matematice.</li> </ul> |
| <p>Motivație, metodologie, strategii, platforme</p> | <p>O sarcină majoră a acestui proiect de învățare este de a dezvolta abilitățile analitice ale elevilor, învățându-i cum să modeleze și să rezolve probleme cu ecuații liniare multivariabile. Aceste lecții urmăresc să sporească nivelul de cunoștințe matematice și gândirea critică ale elevilor și să sublinieze rolul important pe care matematica îl joacă în cadrul altor științe, inginerie, afaceri și în viața de zi cu zi. Celălalt obiectiv major al acestor lecții este de a dezvolta abilitățile informatice ale elevilor, învățându-i cum să rezolve ecuații diofantiene liniare cu numere întregi pozitive folosind o foaie de calcul. Metodele utilizate includ valorificarea conexiunilor interdisciplinare între matematică, științe naturale (chimie), inginerie și antreprenariat.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |

#### 4. Pregătire și mijloace

|                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|--------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Pregătire, spațiu</p> <p><i>Sfaturi pentru depășirea dificultăților</i></p> | <p>Inițial, profesorul principal este cel de matematică. El/ea prezintă informațiile teoretice despre ecuațiile diofantiene liniare, metode de bază pentru găsirea soluțiilor și a aplicațiilor lor în problemele legate de viața de zi cu zi. El/ea oferă diverse probleme elevilor și facilitează procesul de găsire a soluțiilor potrivite. În următoarea etapă, profesorul de informatică le explică elevilor cum să rezolve ecuații diofantiene liniare utilizând un software cu foi de calcul, cum ar fi MS Excel. Apoi, profesorul de chimie, profesorul de fizică sau inginerie și profesorul de antreprenariat le propun elevilor probleme care pot fi modelate prin ecuații diofantiene liniare. Elevii, ghidați de profesorii de matematică și informatică, modelează problemele folosind ecuația corectă și le rezolvă. Toți profesorii colaborează cu elevii, demonstrând astfel natura interdisciplinară a învățării</p> |
|--------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|-----------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Resurse, instrumente, materiale, atașamente, echipamente</p> | <p>bazate pe proiecte.</p> <p>Sunt utilizate surse de instruire, materiale digitale și tipărite cu referințele aferente necesare implementării planului de învățare.</p> <p>Elevii lucrează în clasă sau într-un laborator de informatică în timp ce dobândesc noi cunoștințe. Ei discută într-un centru STEAME sau într-un alt mediu sigur, împreună cu profesorii lor, care, la rândul lor, ar trebui să le pună la dispoziție resurse de învățare adecvate, cum ar fi prezentări, videoclipuri, exemple practice etc. Unele materiale și videoclipuri care pot fi folosite pentru motivarea inițială a elevilor sunt următoarele:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● Linear Diophantine Equations, a chapter in: <i>The Heritage of Thales</i> by W.S. Anglin, J. Lambek, Springer, 1995.</li> <li>● <a href="https://math.libretexts.org/Courses/Mount_Royal_University/MATH_2150%3A_Higher_Arithmetic/5%3A_Diophantine_Equations/5.1%3A_Linear_Diophantine_Equations">https://math.libretexts.org/Courses/Mount_Royal_University/MATH_2150%3A_Higher_Arithmetic/5%3A_Diophantine_Equations/5.1%3A_Linear_Diophantine_Equations</a></li> <li>● <a href="https://www.math.uwaterloo.ca/~zcramer/MathCircles/LDE1Problems.pdf">https://www.math.uwaterloo.ca/~zcramer/MathCircles/LDE1Problems.pdf</a></li> <li>● <a href="https://www.math.uwaterloo.ca/~zcramer/MathCircles/LDE2Problems.pdf">https://www.math.uwaterloo.ca/~zcramer/MathCircles/LDE2Problems.pdf</a></li> </ul> <p>Profesorii folosesc, de asemenea, referințele de pe prima pagină a acestui plan, precum și:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● Platforme de comunicare și colaborare - Google Meet, Google Classroom, Zoom, Skype etc.</li> <li>● Platforme de e-learning - Google classroom, Moodle etc.</li> </ul> |
| <p>Sănătate și siguranță</p>                                    | <p>Elevii și profesorii lucrează într-un mediu sănătos și sigur.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |

## 5. Implementare

|                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Activități de instruire, proceduri, reflecții</p> | <p>Acest plan este elaborat cu accent pe cursuri de matematică, informatică, fizică, inginerie, antreprenariat sau într-un club de interese STEAME.</p> <p>Acoperă disciplinele de studiu:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-Matematică</li> <li>-Chimie</li> <li>- Fizică sau inginerie</li> </ul> |
|------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

- Informatică
- Antreprenoriat
- Abilități de prezentare și comunicare

*Profesorii își planifică activitățile folosind Google Calendar și Google Classroom ca parte a programei. Elevii sunt implicați activ prin activități practice și de cercetare desfășurate ca muncă independentă care poate fi discutată în clasă.*

*Există 10 ore de studiu bazate pe o lecție de 40 de minute. Toate cursurile se desfășoară o dată pe săptămână timp de 10 săptămâni consecutive.*

*- 4 ore pentru teoria matematică a ecuațiilor diofantiene liniare neomogene aplicate în rezolvarea problemelor din viața de zi cu zi*

*- 2 ore pentru utilizarea informaticii pentru rezolvarea ecuațiilor diofantiene liniare neomogene în Excel sau utilizând alt software cu foi de calcul*

*- 1 oră pentru egalarea ecuațiilor chimice folosind ecuații diofantiene liniare neomogene*

*- 1 oră pentru rezolvarea problemelor care implică fluxurile de rețea (opțional, inclusiv o întâlnire cu un inginer de rețea care este invitat să participe la lecție)*

*- 1 oră pentru modelarea problemelor de antreprenoriat*

*- 1 oră pentru prezentarea proiectelor elevilor*

#### Evaluare

*Prezentarea rezultatelor finale are loc în fața profesorilor și colegilor de clasă. Fiecare elev prezintă problema pe care a rezolvat-o și metodele pe care le-a folosit, fiind evaluat de profesori. Cele mai importante aspecte care vor fi evaluate sunt: cunoștințele teoretice ale elevului, profunzimea cunoștințelor, abilitățile de gândire analitică, aplicarea conceptelor teoretice, abilitățile de comunicare și prezentare.*

#### Prezentare - Raportare - Împărtășirea rezultatelor

*Toate prezentările sunt încărcate pe site-ul școlii și informațiile sunt publicate pe rețelele de socializare. Proiectele pot fi dezvoltate în continuare în studii de caz, iar elevii și profesorii le pot folosi în cadrul orelor ca materiale didactice și/sau pot fi dezvoltate ca proiecte individuale.*

#### Extensii - Alte informații

--

## Modelul STEAME ACADEMY/Ghidul pentru elaborarea planului de învățare și Elaborarea planului de acțiune

*Etapele principale ale demersului de învățare STEAME:*

### ETAPA I: Pregătirea de către unul sau mai mulți profesori

#### 1. **Formularea ideilor inițiale cu privire la sectoarele/zonle tematice care urmează să fie abordate.**

*Ecuatiile diofantiene liniare sunt o problemă importantă și bine studiată în teoria numerelor (numită „regina matematicii”). Rădăcinile teoriei numerelor datează din perioada în care matematicienii au început să exploreze proprietățile fundamentale ale numerelor în Egiptul antic, Babilon, Grecia etc. Primii matematicieni care au studiat teoria numerelor în Grecia antică au fost membrii școlii lui Pitagora. Moștenirea lăsată de ei a fost dezvoltată de savanți precum Euclid și Diophantus din Alexandria, care este cunoscut ca „părintele algebrei”. Elevii se familiarizează cu elementele de bază ale teoriei numerelor, cum ar fi regulile de divizibilitate și algoritmul euclidian pentru găsirea celui mai mic numitor comun în primele etape de școlaritate. Pe de altă parte, o varietate de probleme din viața de zi cu zi și de afaceri, precum și problemele din științele naturale și inginerie sunt modelate folosind sisteme de ecuații liniare, care pot fi reduse la o ecuație diofantiană liniară cu două sau mai multe variabile. Versiuni simplificate ale unor astfel de probleme pot fi folosite pentru a le demonstra elevilor din clasele a VI-a și a VII-a o varietate de aplicații ale ecuațiilor diofantiene liniare neomogene. Scopul este de a crea conexiuni interdisciplinare între matematică, pe de o parte, și chimie, fizică sau inginerie și antreprenariat, pe de altă parte.*

#### 2. **Implicarea mai multor actori: angajatori/ mediu de afaceri/ părinți/ societate/ mediu înconjurător/ chestiuni de etică.**

*Un inginer de rețea profesionist poate fi invitat să le explice elevilor cum sunt modelate problemele fluxului de rețele cu ecuații liniare.*

#### 3. **Orientarea către grupa de vârstă corespunzătoare elevilor. Concentrarea asupra conexiunilor cu programa școlară oficială. Stabilirea scopurilor și obiectivelor.**

*Tema este destinată elevilor din clasele a VI-a – a VII-a. La orele de matematică, în clasa a V-a (în școlile bulgare), elevii învață mai întâi elementele de bază ale teoriei numerelor – regulile de divizibilitate și algoritmul euclidian pentru găsirea celui mai mic multiplu comun. În clasa a VI-a, elevii întâlnesc pentru prima dată termenul ecuație și învață cum să rezolve ecuații liniare cu o variabilă necunoscută și cum să folosească astfel de ecuații pentru a modela probleme în diferite domenii. La orele de informatică, elevii de clasa a VI-a învață elementele de bază ale MS Excel, la orele de chimie – cum să exprime o reacție chimică printr-o ecuație chimică, iar la orele de tehnologie și antreprenariat – cum să rezolve probleme simple de afaceri. Inegalitățile liniare cu o necunoscută sunt predate în clasa a VII-a în școala gimnazială bulgară. Scopul acestor lecții este de a extinde cunoștințele elevilor din clasele a VI-a – a VII-a despre ecuațiile liniare cu două sau mai multe variabile care sunt rezolvate folosind numere întregi pozitive (sau numere întregi nenegative). Construirea de modele matematice cu ecuații multivariabile este utilă pentru dezvoltarea abilităților analitice ale elevilor și pentru crearea și susținerea unui bagaj de cunoștințe mai bogat în domeniul matematicii și stabilirea legăturii acestora cu alte materii. Deoarece ecuațiile diofantiene sunt adesea întâlnite la competițiile matematice și la olimpiade, includerea acestora în curriculum poate aduce beneficii elevilor care se pregătesc pentru participarea la astfel de concursuri.*

#### 4. **Repartizarea sarcinilor părților implicate. Desemnarea coordonatorului și a locurilor de lucru etc.**

*Profesorii facilitează învățarea elevilor, îi motivează și stabilesc o sarcină reală de îndeplinit; Conducerea școlii susține organizarea unei întâlniri cu un inginer (opțional), desfășurarea extracurriculară a activităților din proiect, precum și prezentarea rezultatelor unui public adecvat. Profesorul de matematică poate juca rolul de coordonator. Activitățile pot fi desfășurate într-o sală de clasă și într-un laborator de calculatoare.*

### ETAPA a II-a: Formularea planului de acțiune (etapele 1-18)

### Pregătirea (de către profesori)

1. **Raportarea la lumea reală, reflecție.** Problemele de egalare a reacțiilor chimice, proiectarea rețelilor (fluxul de rețea), din domeniul criptografiei, antreprenoriatului și din viața de zi cu zi pot fi modelate și rezolvate cu ajutorul ecuațiilor diofantiene liniare neomogene.
2. **Stimulare. Motivare.** Profesorul de matematică le prezintă elevilor teoria ecuațiilor diofantiene liniare și metodele de identificare a soluțiilor. Folosește în mare parte exemple din viața de zi cu zi. Profesorul de chimie, fizică (sau inginerie) și profesorul de antreprenoriat le propun elevilor probleme care pot fi modelate prin ecuații diofantiene liniare. Profesorul de informatică le explică elevilor cum pot fi rezolvate astfel de ecuații folosind foi de calcul. Elevii sunt motivați de probleme din viața reală pe care ar trebui să le rezolve prin aplicarea cunoștințelor matematice.
3. **Formularea unei probleme (eventual în etape sau faze) care derivă din cele de mai sus.** Mai întâi, profesorul le prezintă elevilor o problemă din viața de zi cu zi, care poate fi modelată printr-o ecuație diofantică liniară neomogenă cu două variabile. El îi ajută pe elevi să construiască modelul și să rezolve, folosind numere întregi pozitive, ecuația obținută, valorificând cunoștințele despre regulile de divizibilitate. Apoi, explică ce este o ecuație diofantică liniară și prin ce metode poate fi rezolvată.

### Dezvoltare (de către elevi) – Îndrumare și evaluare (în 9-11, de către profesori)

4. **Crearea contextului. Căutarea/ culegerea de informații.**  
Valorificarea noilor cunoștințe pentru rezolvarea problemelor. Elevii sunt încurajați să caute singuri informații pe Internet și în alte surse. Elevii folosesc aceste informații atunci când își pregătesc proiectele finale.
5. **Simplificarea problemei - Structurarea problemei cu un număr limitat de cerințe**  
Sarcina este clar enunțată cu informațiile necesare.
6. **Definirea cazului. Proiectarea: identificarea materialelor pentru construcție/ dezvoltare/ creare.**  
Sarcina pe care o primesc elevii este clar definită.
7. **Construcție. Flux de lucru. Punerea în aplicare a proiectelor.** Instruire introductivă folosind exemple relevante. Rezolvarea unei probleme reale. Instruire suplimentară. Găsirea unei soluții la problemă. Prezentarea rezultatelor.
8. **Observare. Experimentare. Formularea concluziilor inițiale.** Elevii rezolvă probleme de chimie, inginerie, antreprenoriat, criptografie și din viața de zi cu zi ghidați de profesorul de matematică și informatică. Ei învață cum să modeleze astfel de probleme folosind ecuații diofantiene liniare și cum să le rezolve de sine stătător, folosind noile metode pe care le-au învățat și, de asemenea, cu ajutorul unui software de calcul precum MS Excel.
9. **Documentare. Căutarea domeniilor tematice (domenii AI) legate de subiectul studiat. Explicații bazate pe teorii existente și/sau rezultate empirice.**
10. **Culegerea de rezultate/ informații pe baza etapelor nr. 7, 8, 9.**
11. **Prima prezentare în grup realizată de către elevi.** Elevii prezintă rezultatele muncii lor sub forma unui fișier PPT sau a unei alte prezentări.

### Configurarea și prezentarea rezultatelor (de către elevi) – Îndrumare și evaluare (de către profesori)

#### **Configurarea modelelor STEAME pentru a descrie/ reprezenta/ ilustra rezultatele.**

13. **Studiarea rezultatelor obținute la punctul nr. 9 și formularea concluziilor, utilizând punctul 12.**

14. **Aplicații în viața de zi cu zi – sugestii pentru dezvoltarea etapei nr. 9 (antreprenoriat – zilele STEAME).**

Revizuire (de către profesori)

15. **Revizuirea problemei în general și revizuirea acesteia în condiții mai solicitante**

Finalizarea proiectului (de către elevi). Îndrumare și evaluare (de către profesori)

16. **Repetăți pașii 5–11 cu cerințe suplimentare sau noi, astfel cum au fost formulate la punctul 15.**

17. **Investigare. Studii de caz. Extindere. Formularea unor noi ipoteze. Testarea noilor concluzii.**

18. **Prezentarea concluziilor. Aplicarea unor tehnici de comunicare distincte.**

**ETAPA III: ACADEMIA STEAME. Acțiuni și cooperare în cadrul proiectelor creative pentru elevi**

Titlul proiectului: \_\_\_\_\_

Scurtă descriere/prezentare schematică a mecanismelor de organizare/a responsabilităților pentru desfășurarea acțiunii

| Etape | Activități/Etape                                                                 | Activități/Etape                                          | Activități/ Etape                                                                     |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
|       | Profesorul 1(P1)<br><br>Cooperarea cu P2, P3, P4, P5<br><br>și ghidarea elevilor | <b>Acțiuni ale elevilor</b><br><br>Grup de vârstă: 12-13  | Profesorul nr. 2 (P2)<br><br>Cooperarea cu P2, P3, P4, P5<br><br>și ghidarea elevilor |
|       |                                                                                  |                                                           |                                                                                       |
| A     | Pregătirea etapelor nr. 1,2,3                                                    |                                                           | Cooperare în cadrul etapei nr. 3                                                      |
| B     | Ghidarea în cadrul etapei nr. 9                                                  | 4,5,6,7,8,9,10                                            | Sprijin și asistență în cadrul etapei nr. 9                                           |
| C     | Evaluare creativă                                                                | 11                                                        | Evaluare creative                                                                     |
| D     | Ghidare                                                                          | 12                                                        | Ghidare                                                                               |
| E     | Ghidare                                                                          | 13 (9+12)                                                 | Ghidare                                                                               |
| F     | Organizarea zilelor STEAME                                                       | 14<br><br>Întâlnire cu reprezentanții mediului de afaceri | Organizarea zilelor STEAME                                                            |
| G     | Preparation of step 15                                                           |                                                           | Cooperare în cadrul etapei nr. 15                                                     |
| H     | Ghidare                                                                          | 16 (repetarea etapelor 5-11)                              | Sprijin și asistență                                                                  |
| I     | Ghidare                                                                          | 17                                                        | Sprijin și asistență                                                                  |
| K     | Evaluare creativă                                                                | 18                                                        | Evaluare creativă                                                                     |

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|