



Χρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση. Οι απόψεις και οι γνώμες που εκφράζονται είναι αποκλειστικά του/των συγγραφέα/ων και δεν αντανakλούν κατ' ανάγκη τις απόψεις και τις γνώμες της Ευρωπαϊκής Ένωσης ή του Ευρωπαϊκού Εκτελεστικού Οργανισμού Εκπαίδευσης και Πολιτισμού (EACEA). Ούτε η Ευρωπαϊκή Ένωση ούτε ο EACEA μπορούν να θεωρηθούν υπεύθυνοι γι' αυτές..

STEAME ACADEMY

ΣΧΕΔΙΟ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑΣ ΔΙΕΥΚΟΛΥΝΣΗΣ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ (ΣΧΕΔΙΟ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑΣ) - ΕΠΙΠΕΔΟ 1 ΦΟΙΤΗΤΩΝ

ΤΙΤΛΟΣ: Επίλυση προβλημάτων με τον Διόφαντο

S

T

Eng

A

M

Ent



1. Επισκόπηση

Τίτλος	Επίλυση προβλημάτων με τον Διόφαντο – Μοντελοποίηση με γραμμικές διοφαντικές εξισώσεις		
Ερώτηση ή θέμα αφόρμησης	<i>Ποιος είναι ο Διόφαντος ο Αλεξανδρεύς και γιατί αποκαλείται «πατέρας της άλγεβρας»; Τι είναι η εξίσωση Diophantine; Πώς επιλύεται η γραμμική εξίσωση Diophantine; Πώς μπορούν οι γραμμικές διοφαντικές εξισώσεις δύο ή περισσότερων μεταβλητών να εφαρμοστούν στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων στη Χημεία, τη Φυσική ή τη Μηχανική (ροές δικτύων), την επιχειρηματικότητα (επιχειρήσεις) και την καθημερινή ζωή; Πώς μπορεί να εφαρμοστεί η πληροφορική στην επίλυση γραμμικών διοφαντικών εξισώσεων;</i>		
Ηλικίες, βαθμοί, ...	12-13 ετών	6-7 βαθμοί	
Διάρκεια, Χρονοδιάγραμμα, Δραστηριότητες	10 μαθήματα	10 μαθήματα το καθένα με διάρκεια 40 λεπτά.	1 μάθημα την εβδομάδα εντός 10 συνεχόμενων εβδομάδων
Ευθυγράμμιση με το πρόγραμμα σπουδών	Μαθηματικά, Χημεία, Φυσική ή Μηχανική, Κρυπτογραφία, Επιχειρηματικότητα, Πληροφορική (Excel ή άλλο λογισμικό υπολογιστικών φύλλων) Ένα σημαντικό πρόβλημα στη θεωρία αριθμών είναι οι γραμμικές διοφαντικές εξισώσεις. Σε αυτά τα μαθήματα, οι μαθητές θα μάθουν για τον Διόφαντο της Αλεξάνδρειας, γνωστό ως «πατέρα της άλγεβρας», και τις γραμμικές διοφαντικές εξισώσεις. Θα μάθουν πώς οι γραμμικές διοφαντικές εξισώσεις (ομοιογενείς και μη ομοιογενείς) επιλύονται χρησιμοποιώντας διαφορετικές μεθόδους - με τη βοήθεια κανόνων διαιρετότητας, τη μέθοδο εύρεσης μιας συγκεκριμένης λύσης με τον εκτεταμένο Ευκλείδειο αλγόριθμο για τον μεγαλύτερο κοινό διαιρέτη (gcd) και στη συνέχεια γράφοντας τους τύπους για		

τη γενική λύση και χρησιμοποιώντας τη μέθοδο υποκατάστασης του Euler (διαχωρισμός ακέραιων και κλασματικών μερών σε αναλυτικές εκφράσεις). Οι φοιτητές θα συζητήσουν τον αριθμό των λύσεων τέτοιων εξισώσεων – λύσεων σε φυσικούς αριθμούς και ακέραιους αριθμούς. Θα μάθουν επίσης για το πρόβλημα του νομίσματος Frobenius και τις γενικεύσεις του. Οι φοιτητές θα μάθουν πώς να επιλύουν γραμμικές μη ομοιογενείς διοφαντικές εξισώσεις στο Excel χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Solver με περιορισμούς (ή άλλο λογισμικό υπολογιστικών φύλλων) ή να επιλύουν τέτοιες εξισώσεις με διαδικτυακές εφαρμογές. Οι φοιτητές θα μάθουν επίσης πώς να κατασκευάζουν μαθηματικά μοντέλα προβλημάτων στη Χημεία (εξισορρόπηση χημικών εξισώσεων), τη Φυσική ή τη Μηχανική (ροές δικτύου), την επιχειρηματικότητα (επιχειρηματικά προβλήματα) και προβλήματα καθημερινής ζωής με γραμμικές μη ομοιογενείς διοφαντικές εξισώσεις δύο ή περισσότερων μεταβλητών.

Συνεισφέροντες,
Συνεργάτες

(Προαιρετικό) Επαγγελματίας μηχανικός δικτύων.

Περίληψη - Σύνοψη

Το μάθημα ξεκινά με τη μαθηματική θεωρία των γραμμικών διοφαντικών εξισώσεων. Ο καθηγητής μαθηματικών θυμάται τη βασική θεωρία αριθμών (από την 5η τάξη) - κανόνες διαιρετότητας και τον Ευκλείδειο αλγόριθμο για την εύρεση του μεγαλύτερου κοινού διαιρέτη (gcd) δύο θετικών ακεραίων. Ο καθηγητής μαθηματικών μπορεί να ξεκινήσει την εισαγωγή του νέου υλικού θέτοντας στους μαθητές ένα απλό πρόβλημα καθημερινής ζωής το οποίο μπορεί να μοντελοποιηθεί από μια γραμμική μη ομοιογενή εξίσωση Diophantine δύο μεταβλητών. Ο/η εκπαιδευτικός καθοδηγεί τους μαθητές στη δημιουργία του μοντέλου και στην εύρεση των λύσεων στην εξίσωση που λαμβάνεται. Οι μαθητές χρησιμοποιούν κανόνες διαιρετότητας για να λύσουν την εξίσωση. Στη συνέχεια, ο καθηγητής μαθηματικών εισάγει τους μαθητές στον όρο «Διοφαντική εξίσωση» και συγκεκριμένα στις γραμμικές Διοφαντικές εξισώσεις δύο μεταβλητών ($ax + by = c$) και υπογραμμίζει τις διαφορές μεταξύ μιας γραμμικής εξίσωσης μιας μεταβλητής και μιας απροσδιόριστης πολυμεταβλητής εξίσωσης. Ο καθηγητής μαθηματικών εισάγει τους μαθητές σε βασικές μεθόδους επίλυσης γραμμικών μη ομοιογενών διοφαντικών εξισώσεων: χρησιμοποιώντας κανόνες διαιρετότητας, χρησιμοποιώντας τον εκτεταμένο Ευκλείδειο αλγόριθμο για την εύρεση μιας συγκεκριμένης λύσης και στη συνέχεια γράφοντας τους τύπους για τη γενική λύση και με τη μέθοδο υποκατάστασης του Όιλερ. Συζητά με τους φοιτητές την αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε μια τέτοια εξίσωση να έχει ακέραιες λύσεις, τον αριθμό των ακεραίων λύσεων και τον αριθμό των λύσεων σε φυσικούς αριθμούς (περιορίζεται στις μεταβλητές που εκφράζονται από γραμμικές ανισότητες). Ο καθηγητής μαθηματικών δείχνει επίσης πώς να λύσει μια γραμμική εξίσωση Diophantine με περισσότερες από δύο μεταβλητές. Ο καθηγητής μαθηματικών εισάγει επίσης τους μαθητές στο πρόβλημα του νομίσματος Frobenius και τις γενικεύσεις του. Στους πιο προχωρημένους και περίεργους μαθητές, ο καθηγητής μαθηματικών μπορεί να εξηγήσει τη σχέση μεταξύ γραμμικών διοφαντικών εξισώσεων και αντιστοιχιών, δηλαδή πώς μια τέτοια εξίσωση μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή γραμμικής αντιστοιχίας. Ο καθηγητής μαθηματικών μπορεί επίσης να εξηγήσει πώς οι γραμμικές διοφαντικές εξισώσεις μπορούν να εφαρμοστούν σε απλά προβλήματα στην κρυπτογραφία.

Στη συνέχεια, ο καθηγητής πληροφορικής εισάγει τους μαθητές στις μεθόδους που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση γραμμικών μη ομοιογενών διοφαντικών εξισώσεων στο Excel.

Ο καθηγητής χημείας εξηγεί στους μαθητές πώς να εξισορροπήσουν μια χημική εξίσωση που εκφράζει μια χημική αντίδραση και μαζί με τον καθηγητή μαθηματικών εξηγεί πώς να εφαρμόσουν γραμμικές μη ομοιογενείς διοφαντικές εξισώσεις για την εξισορρόπηση μιας χημικής εξίσωσης.

Ο καθηγητής φυσικής (μηχανικής) εισάγει τους μαθητές στα δίκτυα και τις ροές δικτύων. Προαιρετικά, η διεύθυνση του σχολείου μπορεί να καλέσει έναν μηχανικό (δικτύου) για να εισαγάγει τους μαθητές σε δίκτυα και προβλήματα που αφορούν τη ροή δικτύου. Ο καθηγητής μαθηματικών και ο καθηγητής φυσικής εξηγούν στους μαθητές πώς οι γραμμικές διοφαντικές εξισώσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μοντελοποίηση μιας ροής σε ένα δίκτυο.

Ο καθηγητής επιχειρηματικότητας θέτει στους μαθητές επιχειρηματικά προβλήματα τα οποία μπορούν να μοντελοποιηθούν με γραμμικές μη ομοιογενείς διοφαντικές εξισώσεις. Οι μαθητές μπορούν να λύσουν τις εξισώσεις που λαμβάνονται είτε με το χέρι χρησιμοποιώντας τις μεθόδους από μαθήματα μαθηματικών, είτε σε λογισμικό υπολογιστικών φύλλων.

Η εργασία για το θέμα διαρκεί 10 ώρες.

Αναφορές, παραθέσεις

Διόφαντος ο Αλεξανδρεύς

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Strick/diophantus.pdf>

Alfred S. Posamentier, Robert Geretschläger, Charles Li και Christian Spreitzer, The Joy of Mathematics: Marvels, Novelties and Neglected Gems that Rare Teach in Math Class, Prometheus Books, 2017, ISBN 9781633882980.

Elizabeth Mauch και Yixun Shi, Εφαρμογή γραμμικών διοφαντικών εξισώσεων στη διδασκαλία της μαθηματικής σκέψης, Μαθηματικά και Εκπαίδευση Υπολογιστών, Τόμος 37, Iss. 2, (Άνοιξη 2003): 240-247.

Titu Andreescu, Ion Cucurezeanu, Dorin Andrica, Εισαγωγή στις εξισώσεις Diophantine, Birkhauser, 2010, ISBN 978-0-8176-4548-9.

Titu Andreescu, Dorin Andrica, Θεωρία αριθμών - Δομές, παραδείγματα και προβλήματα, Birkhauser, 2009, ISBN: 978-0-8176-3245-8.

Lupu Costică. Μέθοδοι επίλυσης διοφαντικών εξισώσεων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στη Ρουμανία. Science Journal of Education, Τόμος 2, Τεύχος 1, 2014, σελ. 22-32. DOI: 10.11648/J.Sjedu.20140201.14.

<https://sites.millersville.edu/bikenaga/number-theory/linear-diophantine-equations/linear-diophantine-equations.html>

Θεωρία αριθμών – Διοφαντικές εξισώσεις

<https://www.math.utoronto.ca/beni/putnam/2020/2020-NT-diophantine-equations.pdf>

Jeffrey Shallit, Το πρόβλημα Frobenius και οι γενικεύσεις του, <https://cs.uwaterloo.ca/~shallit/Talks/frob14.pdf>

Matthias Beck, How to change coins, M&M's, or chicken nuggets: the linear

Diophantine problem of Frobenius, Chapter in Resources for Teaching Discrete Mathematics Classroom Projects, History Modules, and Articles , σ. 65 - 74

DOI: <https://doi.org/10.5948/UPO9780883859742.011>.

<https://matthbeck.github.io/papers/frobprojects.pdf>

Nadeem Aslam, Jay Villanueva, Επίλυση προβλημάτων Diophantine από το Excel

<https://www.pearson.com/content/dam/one-dot-com/one-dot-com/us/en/files/ICTCM20-Proceedings-Aslam-Villanueva.pdf>

ΔΡ. R.ANBUSELVI, J.SIVASANKARI, Εφαρμογές διοφαντικών εξισώσεων σε χημικές εξισώσεις, JETIR Ιούνιος 2019, Τόμος 6, Τεύχος 6, 371-373.

Deepinder Kaur, Meenal Sambhor, Diophantine Equations and its Applications in Real Life, International Journal of Mathematics And its Applications

Τόμος 5, Τεύχος 2-B (2017), 217-222, ISSN: 2347-1557.

Ράνια. B. M. Amer, The Mathematical Analysis of Linear Diophantine Equations with Two and Three Variables and its Applications (Η μαθηματική ανάλυση των γραμμικών διοφαντικών εξισώσεων με δύο και τρεις μεταβλητές και οι εφαρμογές της), The Egyptian International Journal of Engineering Sciences and Technology, Vol. 42 (2023) 23–28,

DOI: 10.21608/eijest.2022.164811.1185.

Mark Kenneth C. Engcot, Cryptography Using Linear Diophantine Equation, International Journal of Recent Research in Mathematics Computer Science and Information Technology, Vol. 9, Issue 1, pp: (28-33), Μήνας: Απρίλιος 2022- Σεπτέμβριος 2022.

R. Radha, G. Janaki, Εφαρμογές διοφαντικών εξισώσεων σε χημικές αντιδράσεις και κρυπτογραφία, Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, Vol.12No.7 (2021), 3175-3178.

Αντιστοιχίες και γραμμικές διοφαντικές εξισώσεις

[https://math.libretexts.org/Bookshelves/Combinatorics_and_Discrete_Mathematics/Yet_Another_Introductory_Number_Theory_Textbook_-_Cryptology_Emphasis_\(Poritz\)/02%3A_Congruences/2,02%3A_Linear_Congruences](https://math.libretexts.org/Bookshelves/Combinatorics_and_Discrete_Mathematics/Yet_Another_Introductory_Number_Theory_Textbook_-_Cryptology_Emphasis_(Poritz)/02%3A_Congruences/2,02%3A_Linear_Congruences)

David C. Lay, Γραμμική Άλγεβρα και οι εφαρμογές της, 3η έκδοση, Pearson's Publishing House, 2002.

Συνεργασία των Εκπαιδευτικών	Εκπαιδευτικός 1: Καθηγητής Μαθηματικών – εξηγεί τη μαθηματική θεωρία των γραμμικών μη ομοιογενών Διοφαντικών εξισώσεων δύο και περισσότερων μεταβλητών, μεθόδους για την εξεύρεση των λύσεων τους και πώς εφαρμόζονται για τη μοντελοποίηση και την επίλυση καθημερινών προβλημάτων. Εισάγει τους μαθητές στο πρόβλημα του νομίσματος Frobenius. Εκπαιδευτικός 2: Καθηγητής Πληροφορικής – εξηγεί στους μαθητές πώς γραμμικές μη ομοιογενείς διοφαντικές εξισώσεις μπορούν να λυθούν σε υπολογιστικά φύλλα MS Excel ή άλλο παρόμοιο λογισμικό. Εισάγει τους φοιτητές σε διαδικτυακές εφαρμογές για την επίλυση τέτοιων εξισώσεων. Εκπαιδευτικός 3: Καθηγητής Χημείας – Εξηγεί στους μαθητές τη θεωρία των χημικών εξισώσεων και πώς να εξισορροπήσουν μια χημική εξίσωση. Εκπαιδευτικός 4: Καθηγητής Φυσικής (Μηχανικής) – διδάσκει στους μαθητές σχετικά με τα δίκτυα και τις ροές δικτύου. Εκπαιδευτικός 5: Δάσκαλος Επιχειρηματικότητας – εισάγει τους μαθητές σε επιχειρηματικά προβλήματα που μπορούν να μοντελοποιηθούν και να επιλυθούν με τη βοήθεια γραμμικών διοφαντικών εξισώσεων.
Οργάνωση STEAME in Life (SiL)	(Προαιρετικό) Η διοίκηση του σχολείου μπορεί να οργανώσει μια συνάντηση με έναν μηχανικό δικτύου, ο οποίος μπορεί να κληθεί να εξηγήσει στους μαθητές πώς μοντελοποιούνται και επιλύονται τα προβλήματα της ροής δικτύου.
Διαμόρφωση Σχεδίου Δράσης	Βήμα 1. Απόκτηση θεωρητικών μαθηματικών γνώσεων. Οι μαθητές μαθαίνουν για τη μαθηματική θεωρία των γραμμικών μη ομοιογενών διοφαντικών εξισώσεων και τις μεθόδους εύρεσης των λύσεων τους. Βήμα 2. Απόκτηση δεξιοτήτων πληροφορικής. Οι μαθητές μαθαίνουν πώς να χρησιμοποιούν το Excel ή άλλο λογισμικό υπολογιστικών φύλλων για την επίλυση γραμμικών διοφαντικών εξισώσεων. Βήμα 3. Μοντελοποίηση και εφαρμογές. Οι φοιτητές μαθαίνουν πώς προβλήματα στη Χημεία (εξισορρόπηση χημικών εξισώσεων), τη Φυσική ή τη Μηχανική (ροές σε δίκτυα) και την Επιχειρηματικότητα (επιχειρήσεις) μπορούν να μοντελοποιηθούν και να επιλυθούν με τη βοήθεια γραμμικών διοφαντικών εξισώσεων. Βήμα 4. Παρουσίαση του τελικού έργου και αξιολόγηση. Κάθε φοιτητής επιλέγει μία ή περισσότερες από τις εξεταζόμενες περιοχές εφαρμογών των γραμμικών διοφαντικών εξισώσεων - Χημεία, Μηχανική, επιχειρήσεις ή καθημερινή ζωή και επιλύει ένα πρόβλημα σε αυτόν τον τομέα (ή περιοχές) μοντελοποιώντας το με μια γραμμική εξίσωση Diophantine. Κάθε μαθητής λύνει την εξίσωση που λαμβάνεται με το χέρι χρησιμοποιώντας μία από τις μεθόδους που έμαθε στα μαθήματα μαθηματικών και χρησιμοποιώντας ένα λογισμικό υπολογιστικών φύλλων (ή μια εφαρμογή ιστού). Οι μαθητές ετοιμάζουν μια παρουσίαση με το πρόβλημα πάνω στο οποίο εργάστηκαν και τη λύση του και παρουσιάζουν τις εργασίες τους μπροστά στους εκπαιδευτικούς και τους συμμαθητές τους. Κάθε εκπαιδευτικός ακολουθεί τη μεθοδολογία του επιπέδου αξιολόγησης, δηλαδή αξιολογεί τις γνώσεις, τις αναλυτικές δεξιότητες

και τις δεξιότητες παρουσίασης και επικοινωνίας των μαθητών.

* υπό ανάπτυξη τα τελικά στοιχεία του πλαισίου

Μαθησιακοί Σκοποί και Στόχοι

Μετά την ολοκλήρωση της εκπαίδευσης, οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν:

- Τι είναι μια εξίσωση Diophantine.
- Τι είναι μια γραμμική εξίσωση Diophantine. Οι δύο βασικοί τύποι γραμμικών διοφαντικών εξισώσεων – ομοιογενής και μη ομοιογενής και όταν μια μη ομοιογενής γραμμική διοφαντική εξίσωση είναι επιλύσιμη σε ακέραιους αριθμούς.
- Ποιες μέθοδοι χρησιμοποιούνται για την επίλυση γραμμικών μη ομοιογενών διοφαντικών εξισώσεων.
- Πώς γραμμικές μη ομοιογενείς διοφαντικές εξισώσεις επιλύονται σε θετικούς ακέραιους αριθμούς στο Excel ή σε άλλο πρόγραμμα υπολογιστικών φύλλων.
- Πώς γραμμικές μη ομοιογενείς διοφαντικές εξισώσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μοντελοποίηση προβλημάτων στις φυσικές επιστήμες, τη μηχανική, τις επιχειρήσεις και την καθημερινή ζωή.

Μαθησιακά Αποτελέσματα και Αναμενόμενα Αποτελέσματα

Οι φοιτητές θα κατέχουν γνώση των μεθόδων που χρησιμοποιούνται για την επίλυση γραμμικών διοφαντικών εξισώσεων και θα είναι σε θέση να λύσουν τέτοιες εξισώσεις με το χέρι και με τη βοήθεια του MS Excel. Οι φοιτητές θα είναι σε θέση να μοντελοποιήσουν απλά προβλήματα στη χημεία, τη μηχανική, τις επιχειρήσεις και καθημερινά με γραμμικές μη ομοιογενείς διοφαντικές εξισώσεις δύο ή περισσότερων μεταβλητών.

Μετά την ολοκλήρωση των μαθημάτων, οι φοιτητές θα είναι σε θέση να:

- Να κατανοήσουν και να εξηγήσουν τις βασικές μεθόδους επίλυσης γραμμικών διοφαντικών εξισώσεων.
- Για την επίλυση γραμμικών διοφαντικών εξισώσεων σε ένα λογισμικό υπολογιστικών φύλλων όπως το MS Excel.
- Να μοντελοποιήσει προβλήματα στη χημεία (εξισορρόπηση χημικών εξισώσεων), μηχανική δικτύων (ροές σε δίκτυα), επιχειρήσεις και καθημερινή ζωή με τη βοήθεια γραμμικής μη ομοιογενούς εξίσωσης Diophantine δύο ή περισσότερων μεταβλητών.

Προηγούμενες Γνώσεις και Προαπαιτούμενα

Οι φοιτητές θα πρέπει να είναι σε θέση να:

- Για την επίλυση γραμμικών εξισώσεων και γραμμικών ανισοτήτων μιας μεταβλητής.
- Να κατέχουν γνώση των κανόνων διαιρετότητας και να γνωρίζουν πώς να βρίσκουν τον μεγαλύτερο κοινό διαιρέτη gcd δύο θετικών ακεραίων από τον Ευκλείδειο αλγόριθμο.
- Να έχουν βασικές γνώσεις χρήσης ενός λογισμικού υπολογιστικών φύλλων όπως το MS Excel (μορφή δεδομένων, εισαγωγή δεδομένων κ.λπ.).
- Για να προετοιμάσετε μια παρουσίαση (.ppt ή άλλη μορφή) και να την παρουσιάσετε σε ένα ακροατήριο.

Αναμενόμενα αποτελέσματα:

Κίνητρα, Μεθοδολογία, Στρατηγικές, Υποστήριξη	- Καλύτερη και βαθύτερη κατανόηση των αρχών των μαθηματικών και της μαθηματικής γνώσης. - Ανάπτυξη αναλυτικών δεξιοτήτων με μοντελοποίηση με πολυμεταβλητές εξισώσεις και εφαρμογή διαφορετικών μεθόδων για την επίτευξη των λύσεών τους. - Ανάπτυξη δεξιοτήτων πληροφορικής με τη χρήση λογισμικού υπολογιστικών φύλλων για την επίλυση εξισώσεων. - Καλύτερη κατανόηση του τρόπου με τον οποίο τα μαθηματικά εφαρμόζονται σε άλλες επιστήμες, μηχανική, επιχειρήσεις και ότι η μαθηματική γνώση είναι απαραίτητη για την επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής. Ένα σημαντικό καθήκον αυτού του μαθήματος μάθησης είναι να αναπτύξει τις αναλυτικές δεξιότητες των φοιτητών διδάσκοντάς τους πώς να μοντελοποιούν και να επιλύουν προβλήματα με πολυμεταβλητές γραμμικές εξισώσεις. Τα μαθήματα αυτά στοχεύουν στην ενίσχυση των μαθηματικών γνώσεων και της κριτικής σκέψης των φοιτητών και στην υπογράμμιση του σημαντικού ρόλου που διαδραματίζουν τα μαθηματικά σε άλλες επιστήμες, τη μηχανική, τις επιχειρήσεις και την καθημερινή ζωή. Ο άλλος σημαντικός στόχος αυτών των μαθημάτων είναι η περαιτέρω ανάπτυξη των δεξιοτήτων πληροφορικής των φοιτητών διδάσκοντάς τους πώς να λύνουν γραμμικές διοφαντικές εξισώσεις σε θετικούς ακέραιους χρησιμοποιώντας ένα υπολογιστικό φύλλο. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται περιλαμβάνουν την εφαρμογή διεπιστημονικών συνδέσεων μεταξύ μαθηματικών, φυσικών επιστημών (χημεία), μηχανικής και επιχειρηματικότητας (επιχειρήσεις).
--	---

4. Προετοιμασία και μέσα

Προετοιμασία, Διευθέτηση χώρου, συμβουλές αντιμετώπισης προβλημάτων	Στην αρχική περίοδο, ο κορυφαίος δάσκαλος είναι ο καθηγητής μαθηματικών που παρουσιάζει τις θεωρητικές γνώσεις σχετικά με τις γραμμικές διοφαντικές εξισώσεις, τις βασικές μεθόδους εύρεσης λύσεων και εφαρμογών τους σε καθημερινά προβλήματα. Δίνει διάφορα προβλήματα στους μαθητές και τους διευκολύνει στην εξεύρεση των σωστών λύσεων. Στο επόμενο στάδιο, ο καθηγητής πληροφορικής εξηγεί στους μαθητές πώς να λύσουν γραμμικές διοφαντικές εξισώσεις σε λογισμικό υπολογιστικών φύλλων, όπως το MS Excel. Στη συνέχεια, ο καθηγητής χημείας, ο καθηγητής φυσικής ή μηχανικής και ο καθηγητής επιχειρηματικότητας θέτουν στους μαθητές προβλήματα από το αντικείμενό τους, τα οποία μπορούν να μοντελοποιηθούν με γραμμικές διοφαντικές εξισώσεις. Οι μαθητές, καθοδηγούμενοι από τον καθηγητή μαθηματικών και πληροφορικής, μοντελοποιούν το πρόβλημα με τη σωστή εξίσωση και το λύνουν. Όλοι οι εκπαιδευτικοί (ο καθένας ανάλογα με τις ικανότητές του) συνεργάζονται με τους μαθητές για την επίλυση των προβλημάτων τους, αποδεικνύοντας έτσι τον διεπιστημονικό χαρακτήρα της μάθησης που βασίζεται σε έργα. Χρησιμοποιούνται εκπαιδευτικές πηγές, ψηφιακό και έντυπο υλικό με τις σχετικές αναφορές που απαιτούνται για την υλοποίηση του σχεδίου μάθησης.
--	---

Πόροι, εργαλεία, υλικά,
Επισυναπτόμενα,
εξοπλισμός

Οι μαθητές εργάζονται στην τάξη και σε εργαστήριο ηλεκτρονικών υπολογιστών ενώ αποκτούν νέες γνώσεις και δεξιότητες. Συζητούν μαζί ως ομάδα σε ένα κέντρο STEAM ή σε άλλο ασφαλές περιβάλλον με τους δασκάλους τους. Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να διαθέτουν κατάλληλους μαθησιακούς πόρους, όπως παρουσιάσεις, βίντεο, πρακτικά παραδείγματα κ.λπ. Μερικά υλικά και βίντεο που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αρχική παρακίνηση των μαθητών σχετικά με το θέμα είναι τα εξής:

- *Linear Diophantine Equations*, ένα κεφάλαιο στο: *The Heritage of Thales* των W.S. Anglin, J. Lambek, Springer, 1995.
- https://math.libretexts.org/Courses/Mount_Royal_University/MATH_2150%3A_Higher_Arithmetic/5%3A_Diophantine_Equations/5.1%3A_Linear_Diophantine_Equations
- <https://www.math.uwaterloo.ca/~zcramer/MathCircles/LDE1Problems.pdf>
- <https://www.math.uwaterloo.ca/~zcramer/MathCircles/LDE2Problems.pdf>

Οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν επίσης τις αναφορές στην πρώτη σελίδα αυτού του σχεδίου καθώς και:

- Πλατφόρμες επικοινωνίας και συνεργασίας - Google Meet, Google Classroom, Zoom, Skype κ.λπ.
- Πλατφόρμα ηλεκτρονικής μάθησης - Google classroom, Moodle κ.λπ.

Υγεία και Ασφάλεια

Οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί εργάζονται σε ένα υγιές και ασφαλές περιβάλλον.

5. Εφαρμογή

Εκπαιδευτικές
Δραστηριότητες,
Διαδικασίες,
Αναστοχασμοί

Αυτό το σχέδιο αναπτύσσεται με έμφαση σε μαθήματα Μαθηματικών, Πληροφορικής, Χημείας, Φυσικής ή Μηχανικής, Επιχειρηματικότητας ή σε μια λέσχη ενδιαφέροντος STEAME. Καλύπτει τα αντικείμενα σπουδών:

-Μαθηματικά

-Χημεία

- Φυσική ή Μηχανική

-ΑΥΤΟ

-Επιχειρηματικό πνεύμα

- Δεξιότητες παρουσίασης και επικοινωνίας

Οι εκπαιδευτικοί σχεδιάζουν τις δραστηριότητές τους στο περιβάλλον Google χρησιμοποιώντας το Ημερολόγιο Google και το Google Classroom ως μέρος του προγράμματος σπουδών. Οι μαθητές συμμετέχουν ενεργά μέσω πρακτικής εμπειρίας και έρευνας που διεξάγεται ως ανεξάρτητη εργασία που μπορεί να συζητηθεί στην τάξη.

Υπάρχουν 10 ώρες μελέτης με βάση ένα μάθημα 40 λεπτών. Όλα τα μαθήματα πραγματοποιούνται μία φορά την εβδομάδα με πρόγραμμα σπουδών για 10 συνεχόμενες εβδομάδες.

- 4 ώρες για μαθηματική θεωρία γραμμικών μη ομοιογενών διαφορικών εξισώσεων, επίλυση καθημερινών προβλημάτων

- 2 ώρες χρήσης πληροφορικής για την επίλυση γραμμικών μη ομοιογενών διαφορικών εξισώσεων σε Excel ή άλλο λογισμικό υπολογιστικών φύλλων

- 1 ώρα για εξισορρόπηση χημικών εξισώσεων με γραμμικές μη ομοιογενείς διαφορικές εξισώσεις

- 1 ώρα για προβλήματα που αφορούν ροές δικτύου (προαιρετικά, συμπεριλαμβανομένης συνάντησης με μηχανικό δικτύου που καλείται να συμμετάσχει στο μάθημα)

- 1 ώρα για μοντελοποίηση επιχειρηματικών προβλημάτων

- 1 ώρα για την παρουσίαση των εργασιών των φοιτητών

Εκτίμηση - Αξιολόγηση

Η παρουσίαση των τελικών αποτελεσμάτων γίνεται μπροστά στους εκπαιδευτικούς και τους συμμαθητές όπου κάθε μαθητής παρουσιάζει το πρόβλημα που έλυσε και τις μεθόδους που χρησιμοποίησε. Κάθε παρουσίαση αξιολογείται από τους εκπαιδευτικούς. Βασικοί παράγοντες είναι: οι θεωρητικές γνώσεις του φοιτητή, το βάθος των γνώσεων, οι δεξιότητες αναλυτικής σκέψης, η εφαρμογή θεωρητικών εννοιών, οι δεξιότητες επικοινωνίας και παρουσίασης.

Παρουσίαση - Αναφορά
- Διαμοιρασμός

Όλες οι παρουσιάσεις με τα αποτελέσματα της εργασίας αναρτώνται στην ιστοσελίδα του σχολείου και οι πληροφορίες δημοσιεύονται στα μέσα

Επεκτάσεις - Άλλες
πληροφορίες

κοινωνικής δικτύωσης. Τα έργα μπορούν να αναπτυχθούν περαιτέρω σε μελέτες περιπτώσεων και οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί μπορούν να τα χρησιμοποιήσουν στις τάξεις τους ως διδακτικό υλικό ή / και να αναπτυχθούν περαιτέρω ως μεμονωμένα έργα.

--

Σημαντικά βήματα της μαθησιακής προσέγγισης STEAME:

ΣΤΑΔΙΟ Ι: Προετοιμασία από έναν ή περισσότερους εκπαιδευτικούς

1. Διατύπωση αρχικών σκέψεων για τους θεματικούς τομείς/περιοχές που θα καλυφθούν:

Οι γραμμικές διοφαντικές εξισώσεις είναι ένα σημαντικό και καλά μελετημένο πρόβλημα στη θεωρία αριθμών (που ονομάζεται βασίλισσα των μαθηματικών). Οι ρίζες της θεωρίας αριθμών πηγαινούν πίσω στους πρώτους μελετητές, όταν οι μαθηματικοί άρχισαν να διερευνούν τις θεμελιώδεις ιδιότητες των αριθμών στην αρχαία Αίγυπτο, τη Βαβυλώνα, την Ελλάδα κ.λπ. Οι πρώτοι μαθηματικοί που μελέτησαν τη θεωρία αριθμών στην αρχαία Ελλάδα ήταν τα μέλη της σχολής του Πυθαγόρα. Η κληρονομιά τους αναπτύχθηκε περαιτέρω από μελετητές όπως ο Ευκλείδης και ο Διόφαντος της Αλεξάνδρειας, ο οποίος είναι γνωστός ως «ο πατέρας της άλγεβρας». Οι μαθητές εξοικειώνονται με βασικά στοιχεία της θεωρίας αριθμών, όπως οι κανόνες διαιρετότητας και ο Ευκλείδειος αλγόριθμος για την εύρεση της gcd, στα πρώτα στάδια της σχολικής τους εκπαίδευσης. Από την άλλη, μια ποικιλία καθημερινών και επιχειρηματικών προβλημάτων, καθώς και προβλήματα στις φυσικές επιστήμες και τη μηχανική μοντελοποιούνται με συστήματα γραμμικών εξισώσεων που μπορούν να αναχθούν σε μια γραμμική εξίσωση Diophantine για δύο ή περισσότερες μεταβλητές. Απλοποιημένες εκδόσεις τέτοιων προβλημάτων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να επιδείξουν στους μαθητές της 6ης και 7ης τάξης μια ποικιλία εφαρμογών γραμμικών μη ομοιογενών διοφαντικών εξισώσεων. Ο σκοπός είναι να δημιουργηθούν διεπιστημονικές συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών, από τη μία πλευρά, και της χημείας, της φυσικής ή της μηχανικής και της επιχειρηματικότητας, αντίστοιχα, από την άλλη.

2. Εμπλοκή στον κόσμο του ευρύτερου περιβάλλοντος / εργασίας / επιχείρησης / γονέων / κοινωνίας / περιβάλλοντος / ηθικής:

Ένας επαγγελματίας μηχανικός δικτύων μπορεί να κληθεί να εξηγήσει στους μαθητές πώς τα προβλήματα της ροής δικτύων μοντελοποιούνται με γραμμικές εξισώσεις.

3. Ηλικιακή Ομάδα-Στόχος Μαθητών - Συσχέτιση με το Επίσημο Πρόγραμμα Σπουδών - Καθορισμός Σκοπών και Στόχων

Το θέμα προορίζεται για μαθητές των τάξεων 6-7 της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στο μάθημα των Μαθηματικών, στην 5η τάξη (στα βουλγαρικά σχολεία), οι μαθητές μαθαίνουν πρώτα τα βασικά της θεωρίας αριθμών – κανόνες διαιρετότητας και τον Ευκλείδειο αλγόριθμο για την gcd. Στην 6η τάξη, οι μαθητές συναντούν για πρώτη φορά τον όρο εξίσωση και μαθαίνουν πώς να λύνουν γραμμικές εξισώσεις μιας άγνωστης μεταβλητής και πώς να χρησιμοποιούν τέτοιες εξισώσεις για να μοντελοποιήσουν προβλήματα σε διάφορους τομείς. Μαθαίνουν για τον αθέμιτο q Στις τάξεις πληροφορικής, οι μαθητές της 6ης τάξης μαθαίνουν τα βασικά του MS Excel, στα μαθήματα Χημείας - πώς να εκφράσουν μια χημική αντίδραση με μια χημική εξίσωση και στα μαθήματα Τεχνολογίας και Επιχειρηματικότητας - πώς να λύσουν απλά επιχειρηματικά και οικονομικά προβλήματα. Οι γραμμικές ανισότητες που αφορούν έναν άγνωστο διδάσκονται στην 7η τάξη στη βουλγαρική δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Στόχος αυτών των μαθημάτων είναι να διευρύνουν τις γνώσεις των γραμμικών εξισώσεων διδάσκοντας στους μαθητές της 6ης και 7ης τάξης για γραμμικές εξισώσεις που περιλαμβάνουν δύο ή περισσότερες μεταβλητές οι οποίες επιλύονται όχι στο σύνολό τους στο πεδίο των πραγματικών αριθμών αλλά μόνο σε θετικούς ακέραιους (ή μη αρνητικούς ακέραιους αριθμούς). Η κατασκευή μαθηματικών μοντέλων με πολυμεταβλητές εξισώσεις είναι χρήσιμη για την ανάπτυξη των αναλυτικών δεξιοτήτων των μαθητών και τη δημιουργία και διατήρηση μιας βαθύτερης γνώσης στα μαθηματικά και τη σύνδεσή της με άλλα θέματα. Καθώς οι διοφαντικές εξισώσεις συναντώνται συχνά σε μαθηματικούς διαγωνισμούς και Ολυμπιάδες, η συμπερίληψή τους στο πρόγραμμα σπουδών μπορεί να ωφελήσει τους μαθητές στην προετοιμασία τους για τη συμμετοχή σε τέτοιους διαγωνισμούς.

4. Οργάνωση των καθηκόντων των εμπλεκόμενων μερών - Ορισμός συντονιστή - Χώροι εργασίας κ.λπ.

Οι εκπαιδευτικοί οργανώνουν την κατάρτιση και υποστηρίζουν το έργο των μαθητών. παρακινούν τους μαθητές και θέτουν ένα πραγματικό καθήκον προς εκπλήρωση. Η διεύθυνση του σχολείου υποστηρίζει

τη διοργάνωση συναντήσεων με μηχανικό (προαιρετικό), την εξωσχολική οργάνωση της εργασίας, καθώς και την παρουσίαση των αποτελεσμάτων σε κατάλληλο ακροατήριο. Ο καθηγητής μαθηματικών μπορεί να παίξει το ρόλο του συντονιστή. Οι χώροι εργασίας που θα χρησιμοποιηθούν είναι μια τάξη και ένα εργαστήριο υπολογιστών.

ΣΤΑΔΙΟ II: Διαμόρφωση Σχεδίου Δράσης (Βήματα 1-18)

Προετοιμασία (από εκπαιδευτικούς)

1. Σχέση με τον πραγματικό κόσμο – Προβληματισμός

Προβλήματα εξισορρόπησης χημικών αντιδράσεων, σχεδιασμού δικτύων (ροή δικτύου), κρυπτογραφίας, επιχειρηματικότητας (business) και καθημερινής ζωής μπορούν να μοντελοποιηθούν και να επιλυθούν με τη βοήθεια γραμμικών μη ομοιογενών διαφορικών εξισώσεων.

2. Κίνητρα – Κίνητρα

Ο καθηγητής μαθηματικών εισάγει τους μαθητές στη θεωρία των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων και στις μεθόδους εύρεσης των λύσεων τους. Ο καθηγητής μαθηματικών χρησιμοποιεί κυρίως παραδείγματα από την καθημερινή ζωή. Ο καθηγητής χημείας, φυσικής (ή μηχανικής) και ο καθηγητής επιχειρηματικότητας θέτουν στους μαθητές προβλήματα από τα μαθήματά τους, τα οποία μπορούν να μοντελοποιηθούν με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Ο καθηγητής πληροφορικής εξηγεί στους μαθητές πώς τέτοιες εξισώσεις μπορούν να λυθούν χρησιμοποιώντας υπολογιστικά φύλλα.

Οι μαθητές παρακινούνται από πραγματικά προβλήματα της ζωής τα οποία πρέπει να λύσουν εφαρμόζοντας μαθηματικές γνώσεις.

3. Διατύπωση προβλήματος (ενδεχομένως σε στάδια ή φάσεις) που προκύπτει από τα παραπάνω

Οι μαθητές εισάγονται αρχικά σε ένα καθημερινό πρόβλημα από τον καθηγητή μαθηματικών το οποίο μπορεί να μοντελοποιηθεί από μια γραμμική μη ομοιογενή εξίσωση *Diorphantine* δύο μεταβλητών. Ο καθηγητής μαθηματικών βοηθά τους μαθητές να κατασκευάσουν το μοντέλο και να λύσουν σε θετικούς ακέραιους την εξίσωση λήψης χρησιμοποιώντας γνώσεις σχετικά με τους κανόνες διαιρετότητας. Στη συνέχεια, ο καθηγητής μαθηματικών ξεκινά με τη νέα γνώση σχετικά με το τι είναι μια γραμμική εξίσωση *Diorphantine* και με ποιες μεθόδους μπορεί να λυθεί.

Ανάπτυξη (από μαθητές) – Καθοδήγηση & Αξιολόγηση (9-11, από εκπαιδευτικούς)

4. Δημιουργία φόντου - αναζήτηση / συλλογή πληροφοριών:

Νέες γνώσεις που εφαρμόζονται κατά την επίλυση προβλημάτων. Οι μαθητές ενθαρρύνονται να αναζητούν μόνοι τους πληροφορίες στο διαδίκτυο και σε άλλες πηγές. Οι μαθητές χρησιμοποιούν αυτές τις πληροφορίες κατά την προετοιμασία των τελικών εργασιών τους.

5. Απλοποιήστε το πρόβλημα - Διαμορφώστε το πρόβλημα με περιορισμένο αριθμό απαιτήσεων Η εργασία δηλώνεται σαφώς με τις απαραίτητες πληροφορίες.

6. Case Making - Σχεδιασμός - προσδιορισμός υλικών για την κατασκευή / ανάπτυξη / δημιουργία

Η εργασία που λαμβάνουν οι μαθητές είναι σαφώς καθορισμένη.

7. Κατασκευή - Ροή εργασιών - Υλοποίηση έργων

Εισαγωγική εκπαίδευση με σχετικά παραδείγματα - Θέτοντας ένα πραγματικό πρόβλημα - Πρόσθετη εκπαίδευση - Βρίσκοντας μια λύση στο πρόβλημα - Παρουσίαση των αποτελεσμάτων

8. Παρατήρηση-Πειραματισμός - Αρχικά Συμπεράσματα

Οι μαθητές επιλύουν προβλήματα από τη χημεία, τη μηχανική, τις επιχειρήσεις, την κρυπτογραφία και την καθημερινή ζωή καθοδηγούμενοι από τον καθηγητή μαθηματικών και πληροφορικής. Μαθαίνουν πώς να μοντελοποιούν τέτοια προβλήματα με γραμμικές διοφαντικές εξισώσεις και πώς να τα λύνουν με το χέρι με τις νέες μεθόδους που έχουν μάθει αλλά και με τη βοήθεια της πληροφορικής, σε ένα λογισμικό υπολογιστικών φύλλων όπως το MS Excel.

9. Τεκμηρίωση - Αναζήτηση Θεματικών Περιοχών (TN) σχετικών με το υπό μελέτη αντικείμενο – Επεξήγηση βάσει Υφιστάμενων Θεωριών ή/και Εμπειρικών Αποτελεσμάτων

Οι μαθητές έχουν τις απαραίτητες θεωρητικές πληροφορίες και παραδείγματα.

10. Συγκέντρωση αποτελεσμάτων / πληροφοριών βάσει των σημείων 7, 8, 9

Σε κάθε βήμα, οι εκπαιδευτικοί αναφέρουν την πρόοδο των μαθητών.

11. Πρώτη ομαδική παρουσίαση από μαθητές

Οι μαθητές παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της εργασίας τους με τη μορφή .ppt ή άλλης παρουσίασης.

Διαμόρφωση & Αποτελέσματα (από μαθητές) – Καθοδήγηση & Αξιολόγηση (από εκπαιδευτικούς)

12. Διαμορφώστε τα μοντέλα STEAME για να περιγράψετε / αναπαραστήσετε / απεικονίσετε τα αποτελέσματα

13. Μελετώντας τα αποτελέσματα σε 9 και εξάγοντας συμπεράσματα, χρησιμοποιώντας 12

14. Εφαρμογές στην Καθημερινή Ζωή - Προτάσεις για Ανάπτυξη 9 (Επιχειρηματικότητα - SIL Days)

Ανασκόπηση (από εκπαιδευτικούς)

15. Επανεξετάστε το πρόβλημα και αναθεωρήστε το υπό πιο απαιτητικές συνθήκες

Ολοκλήρωση Εργασιών (από μαθητές) – Καθοδήγηση & Αξιολόγηση (από εκπαιδευτικούς)

16. Επαναλάβετε τα βήματα 5 έως 11 με πρόσθετες ή νέες απαιτήσεις, όπως διατυπώνονται στο σημείο 15

17. Διερεύνηση - Μελέτες περιπτώσεων - Επέκταση - Νέες θεωρίες - Δοκιμή νέων συμπερασμάτων

18. Παρουσίαση Συμπερασμάτων - Επικοινωνιακών Τακτικών.

STAGE III: STEAME ACADEMY Δράσεις και Συνεργασία σε Δημιουργικά Έργα για μαθητές σχολείων

Τίτλος Έργου: Επίλυση Προβλημάτων με τον Διόφαντο – Μοντελοποίηση με γραμμικές Διοφαντικές εξισώσεις

Σύντομη Περιγραφή/Περίγραμμα Οργανωτικών Ρυθμίσεων / Ευθυνών για Δράση

ΣΤΑΔΙΟ	Δραστηριότητες/Βήματα Εκπαιδευτικός 1(T1) Συνεργασία με T2, T3, T4, T5 και καθοδήγηση μαθητών	Δραστηριότητες /Βήματα Από Φοιτητές Ηλικιακή ομάδα: 12-13	Δραστηριότητες /Βήματα Δάσκαλος 2 (T2) Συνεργασία με T1, T3, T4, T5 και καθοδήγηση μαθητών
Ένας	Προετοιμασία των βημάτων 1,2,3		Συνεργασία στο στάδιο 1,2,3
B	Καθοδήγηση στο βήμα 9	4,5,6,7,8,9,10	Οδηγίες υποστήριξης στο βήμα 9
C	Δημιουργική Αξιολόγηση	11	Δημιουργική Αξιολόγηση
D	Καθοδήγηση	12	Καθοδήγηση

E	Καθοδήγηση	13 (9+12)	Καθοδήγηση
F	Οργάνωση (SIL) Το STEAME στη ζωή	14 Συνάντηση με εκπροσώπους επιχειρήσεων	Οργάνωση (SIL) Το STEAME στη ζωή
G	Προετοιμασία του βήματος 15		Συνεργασία στο βήμα 15
H	Καθοδήγηση	16 (επανάληψη 5-11)	Καθοδήγηση υποστήριξης
Εγώ	Καθοδήγηση	17	Καθοδήγηση υποστήριξης
K	Δημιουργική Αξιολόγηση	18	Δημιουργική Αξιολόγηση